

# Sujets des dossiers d’arithmétique, algèbre et géométrie

Archives 2005-2009

Le nom du fichier pdf associé à un dossier est obtenu en collant les lettres (initiales de l’auteur) et le nombre final.

## Table des matières

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Les ensembles de nombres</b>                                                 | <b>6</b>  |
| DP04-1-1 : Développements décimaux des rationnels (00) . . . . .                  | 6         |
| DP04-1-2 : Fractions égyptiennes (00) . . . . .                                   | 7         |
| MC07-1-1 : Ecriture des nombres (07.1) - 2 pages . . . . .                        | 9         |
| <b>2 Arithmétique (pgcd, ppcm)</b>                                                | <b>10</b> |
| DP04-2-3 : Déterminer a,b connaissant ... (00, 06.s) . . . . .                    | 10        |
| SA06-2-1 : Étude de $x^{k-1}$ (06.1) - 1 page . . . . .                           | 11        |
| MC08-2-19 : Etude du PGCD(an+b,cn+d) (08.1) - 1 page . . . . .                    | 12        |
| MC08-02-23 : Recherche de reste et de PGCD dans deux suites (08.0, 09.1) - 1 page | 13        |
| JURY08-03-0107 : Les nombres parfaits (09.1,09.2) . . . . .                       | 14        |
| JURY05-02-2706 : Pgcd-Ppcm (09.1) . . . . .                                       | 15        |
| <b>3 Arithmétique (décomposition en produit de facteurs premiers)</b>             | <b>16</b> |
| JURY07-03-0507 : Résolution de $x^2 - y^2 = n$ (08.1,08.2) - 2 pages . . . . .    | 16        |
| DJ08-3-01 : arithmétique nombres premiers (08.0) . . . . .                        | 17        |
| <b>4 Arithmétique (congruences)</b>                                               | <b>18</b> |
| DP04-4-4 : Equation diophantienne de degré 2 (00, 07.s) . . . . .                 | 18        |
| CG07-4-1 : Points d’un cône à coordonnées entières (07.2, 08.1) . . . . .         | 19        |
| SA07-4-2 : Rep-units (07.1, 08.1) - 2 pages . . . . .                             | 20        |
| SA07-4-3 : Cryptographie (07.1,09.1,09.2) - 1 page . . . . .                      | 21        |
| DJ05-4-2 : divisibilité congruence (05.2) . . . . .                               | 22        |
| <b>5 Arithmétique (équations diophantiennes <math>ax + by = c</math>)</b>         | <b>23</b> |
| DP04-5-5 : Le maire de Saint-Tricotin (00, 08.s) . . . . .                        | 23        |
| JURY06-5-2906 : Equation diophantienne de degré 1 (07.2, 08.1,08.2) . . . . .     | 24        |
| JURY05-05-0407 : La période du corps céleste (08.1,08.2) - 2 pages . . . . .      | 25        |
| MC08-05-24 : Equation $ax+by=c$ (09.1) . . . . .                                  | 26        |
| <b>6 Proportionnalité</b>                                                         | <b>27</b> |
| CG05-6-2 : Rémunérations comparées et pourcentages (06.2,09.1,09.2) . . . . .     | 27        |
| JURY05-06-1407 : Calcul d’impôts (08.1,08.2) - 3 pages . . . . .                  | 28        |

|                                                                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>7 Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue (ou pouvant s'y ramener) (2)</b> | <b>30</b> |
| CG05-7-3 : Bille dans l'eau dans un cylindre (06.2, 07.2,09.1,09.2) . . . . .                             | 30        |
| MC07-07-2 : Recherche d'un carré dans un triangle (07.1, 08.1) - 1 page . . . . .                         | 31        |
| JURY05-07-0107 : Equations, inéquations au collège (09.1) 2 pages . . . . .                               | 32        |
| <b>8 Systèmes linéaires</b>                                                                               | <b>34</b> |
| MC07-08-3 : Tour de contrôle (07.1,09.1,09.2) - 2 pages . . . . .                                         | 34        |
| SA06-8-4 : Cercle inscrit et système (06.1) - 1 page . . . . .                                            | 35        |
| SA07-8-5 : Trois joueurs (07.1) - 1 page . . . . .                                                        | 36        |
| <b>9 Systèmes d'inéquations, programmation linéaire</b>                                                   | <b>37</b> |
| CG06-9-4 : Programmation linéaire, bénéfice maximum (06.2, 07.2,09.1,09.2) . . . .                        | 37        |
| SA07-9-6 : Partage d'une somme (07.1) - 2 pages . . . . .                                                 | 38        |
| CG07-09-18 : Gestion de portefeuille (07.2) - 2 pages . . . . .                                           | 39        |
| <b>10 Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence, etc.) (2)</b>                          | <b>41</b> |
| JURY06-10-1907 : Autour du pgcd (07.2,09.1,09.2) . . . . .                                                | 41        |
| DP04-10-6 : Les suites de Wallis (00) . . . . .                                                           | 42        |
| CG06-10-5 : Recherche de trois entiers (06.2) . . . . .                                                   | 43        |
| MC06-10-4 : Rep-units (06.1) - 2 pages . . . . .                                                          | 44        |
| JURY05-10-1607 : Recherche de trois entiers (07.2, 09.s) - 2 pages . . . . .                              | 45        |
| JURY08-10-1007 : Divers types de raisonnement (09.1) . . . . .                                            | 46        |
| <b>11 Calcul matriciel</b>                                                                                | <b>47</b> |
| DP06-11-37 : Dextrose et lévulose (06.2, 08.2) . . . . .                                                  | 47        |
| DP07-11-38 : Comptes bancaires (la même !) (07.2, 09.1) . . . . .                                         | 48        |
| FIR06-11-1 : Evolution de la population d'une île (06.1,07.1,08.1, 09.1) . . . . .                        | 50        |
| <b>12 Théorie des graphes</b>                                                                             | <b>52</b> |
| DP04-12-7 : Le graphe du musée (05.1, 05.2, 07.1, 07.2, 09.1, 09.2) . . . . .                             | 52        |
| JURY05-12-0307 : Graphes (06.1, 06.2) . . . . .                                                           | 54        |
| DP08-12-54 : Graphes inspiré de jury 05(08.1, 08.2) . . . . .                                             | 55        |
| <b>13 Problèmes d'incidence (alignement et concours) (2)</b>                                              | <b>56</b> |
| DP04-13-8 : Théorème de Céva (00, 05.s) . . . . .                                                         | 56        |
| DP04-13-9 : Théorème de Newton (00, 07.s) . . . . .                                                       | 57        |
| DP04-13-10 : Théorème de Ménélaüs par les aires (00) . . . . .                                            | 58        |
| MCD06-13-5 : Milieux des côtés et des diagonales dans un quadrilatère convexe (06.s)                      | 59        |
| SA06-13-7 : Barycentre et bissectrices (06.1) - 1 page . . . . .                                          | 60        |
| SA07-13-8 : Parallélogramme et homothétie (07.1) - 1 page . . . . .                                       | 61        |
| SA07-13-9 : Tétraèdre et barycentre (07.1, 08.s) - 1 page . . . . .                                       | 62        |
| CG05-13-19 : Triangles isocèles et cocyclicité (06.2) - 2 pages . . . . .                                 | 63        |
| JURY05-13-1207 : Barycentres et centre du cercle inscrit (08.1,08.2) - 2 pages . . .                      | 64        |
| JURY05-13-2806 : Cube et intersections dans l'espace (07.2, 09.1) - 2 pages . . . .                       | 65        |
| JURY08-13-0507 : Incidence : pyramide coupée par un plan (09.1) . . . . .                                 | 66        |
| <b>14 Parallélisme et orthogonalité</b>                                                                   | <b>67</b> |
| MC07-14-5 : Tétraèdre orthocentrique (07.1, 08.1) - 1 page . . . . .                                      | 67        |
| SA08-14-25 : Quadrilatère inscrit dans un cercle et perpendicularité (08.1) - 2 pages .                   | 68        |

|                                                                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>15 Cocyclicité</b>                                                                                         | <b>69</b>  |
| MCD05-15-4 : Cercles inscrit, circonscrit, orthocentre (05.s) . . . . .                                       | 69         |
| SA07-15-10 : Puissance d'un point par rapport à un cercle. Orthocentre (07.1, 09.1) - 2 pages . . . . .       | 70         |
| <b>16 Calculs de grandeurs (longueurs, aires et volumes)</b>                                                  | <b>71</b>  |
| MCD07-16-7 : Différentes expressions du produit scalaire (07.s) . . . . .                                     | 71         |
| CG06-16-6 : Aire d'un carré dans un carré (06.2, 07.2, 09.1) . . . . .                                        | 72         |
| CG06-16-7 : Tétraèdre, section et calcul de volume (06.0, 07.2) . . . . .                                     | 74         |
| MC07-16-14 : Le camion et le lapin (07.1, 09.1) - 2 pages . . . . .                                           | 75         |
| CG06-16-20 : $64=65$ (08.1, 08.2) - 2 pages . . . . .                                                         | 76         |
| CG07-16-21 : Cercles dans un triangle (08.1,08.2) - 3 pages . . . . .                                         | 78         |
| CG08-16-26 : Calcul de grandeurs avec coordonnées dans l'espace (08.1,08.2) - 2 pages                         | 80         |
| JURY08-16-1107 : Aire d'un triangle (09.1,09.2) . . . . .                                                     | 81         |
| <b>17 Calculs de grandeurs (angles)</b>                                                                       | <b>82</b>  |
| CG06-17-8 : Calcul d'angle dans une pyramide (06.2, 09.1) . . . . .                                           | 82         |
| <b>18 Problèmes de constructions (à l'aide de transformations) (3)</b>                                        | <b>83</b>  |
| MCD05-18-2 : Rotation envoyant un cercle sur un autre (05.s) . . . . .                                        | 83         |
| MC07-18-6 : Constructions de quadrilatère sur deux cercles (07.1) - 2 pages . . . . .                         | 84         |
| MC07-18-15 : Symétriques et barycentres (07.1,09.1,09.2) - 3 pages . . . . .                                  | 85         |
| SA06-18-11 : Construction triangle à partir des médianes (06.1) - 1 page . . . . .                            | 86         |
| SA06-18-12 : Construction d'un triangle (06.1) - 1 page . . . . .                                             | 87         |
| JURY05-18-2107 : Construction d'un triangle équilatéral (08.1,08.2) - 2 pages . . . .                         | 88         |
| JURY06-18-1507 : Construction d'un triangle rectangle isocèle avec des similitudes (07.2) - 2 pages . . . . . | 89         |
| LB09-18-1 : circuits fermés et symétries centrales (09.s) . . . . .                                           | 90         |
| JURY06-18-2007 : Triangle inscrit et bissectrice(09.1,09.2) - 2 pages . . . . .                               | 91         |
| CG09-18-28 : Cercles tangents à deux droites (09.1,09.2) . . . . .                                            | 93         |
| <b>19 Problèmes de constructions (sections planes et patrons)</b>                                             | <b>94</b>  |
| MC07-19-7 : Hexagone régulier dans un cube (07.1) - 2 pages . . . . .                                         | 94         |
| MC08-19-18 : Différentes sections d'un tétraèdre (08.1, 09.1) - 2 pages . . . . .                             | 95         |
| <b>20 Problèmes sur les configurations (étude de configurations à l'aide de différents outils) (3)</b>        | <b>97</b>  |
| MCD06-20-6 : Symétrie de l'orthocentre (06.s) . . . . .                                                       | 97         |
| CG05-20-9 : Triangles équilatéraux et carré (07.2) . . . . .                                                  | 98         |
| CG06-20-10 : Tourniquette (05.2,09.1,09.2) . . . . .                                                          | 99         |
| JURY05-20-1507 : Outils pour montrer une orthogonalité (08.1,08.2) - 3 pages . . . .                          | 100        |
| JURY05-20-0607 : Questions variées au collège (07.2, 09.1) - 3 pages . . . . .                                | 101        |
| DJ05-20-4 : configurations usuelles (05.2) . . . . .                                                          | 102        |
| DJ05-20-5 : polygones réguliers (05.2) . . . . .                                                              | 103        |
| DJ09-20-12 : bissectrices intérieures d'un parallélogramme (09.O) . . . . .                                   | 104        |
| DJ08.20.11 : Une relation d'Euler (08.O) . . . . .                                                            | 105        |
| <b>21 Problèmes sur les configurations (problèmes de longueur ou d'aire minimale)</b>                         | <b>107</b> |
| SA07-21-13 : Problème de Fagnano (07.1) - 1 page . . . . .                                                    | 107        |
| MC08-21-22 : Un rectangle d'aire maximale dans un tétraèdre (08.1) - 1 page . . . .                           | 108        |
| JURY08-21-1507 : Des cercles et des distances (09.1,09.2) - 2 pages . . . . .                                 | 109        |

|                                                                                                 |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>22 Problèmes de recherche de lieux géométriques (donnés par des conditions géométriques)</b> | <b>112</b> |
| (3)                                                                                             |            |
| CG05-22-11 : Lieu de points avec réciproque (06.2) . . . . .                                    | 112        |
| CG05-22-12 : Lieu de points par transformations (07.2) . . . . .                                | 113        |
| CG05-22-13 : Lieu de points par transformation et angle (05.0,09.1,09.2) . . . . .              | 114        |
| MCD06-22-6 : Symétrie de l'orthocentre (08.s-1) . . . . .                                       | 115        |
| MC06-22-8 : Cercle et bissectrice (06.1) - 2 pages . . . . .                                    | 116        |
| SA07-22-22 : Intersection de tangente à un cercle (07.1) - 1 page . . . . .                     | 117        |
| MC08-22-20 : Lieu de deux sommets d'un carré (08.1) - 2 pages . . . . .                         | 118        |
| MC08-22-21 : Une équerre glissant sur deux axes (08.1) - 2 pages . . . . .                      | 119        |
| CG08-22-25 : Lieu de points : ellipse (08.1, 08.2) - 2 pages . . . . .                          | 120        |
| DJ05-22-3 : lieux conditions géométriques (05.2) . . . . .                                      | 121        |
| LB09-22-2 : Lieu de points par transformation et avec réciproque (09.s) . . . . .               | 122        |
| JURY05-22-1807 : Diverses solutions pour trouver un arc de cercle (09.1,09.2) . . .             | 123        |
| JURY08-22-0307 : Lieu : distance à deux droites (09.1) . . . . .                                | 124        |
| JURY08-22-1707 : triangles de même aire (09.1) . . . . .                                        | 125        |
| <b>23 Problèmes de recherche de lieux géométriques (lignes de niveau)</b>                       | <b>127</b> |
| SA06-23-14 : Ligne de niveau et barycentre (06.1) - 1 page . . . . .                            | 127        |
| <b>24 Outils (nombres complexes)</b>                                                            | <b>128</b> |
| DP04-24-11 : Construction du pentagone régulier (00) . . . . .                                  | 128        |
| MC07-24-16 : Trois cercles concourants (07.1, 08.1) - 2 pages . . . . .                         | 129        |
| SA07-24-23 : Un cercle et deux carrés (07.1) - 2 pages . . . . .                                | 130        |
| JURY06-24-0207 : Des complexes pour construire un triangle (07.2) - 3 pages . . .               | 131        |
| DJ05-24-5 : polygones réguliers (05.2) . . . . .                                                | 133        |
| JURY05-24-2906 : droite d'Euler (09.s) . . . . .                                                | 134        |
| JURY08-24-1307 : Tangentes à un cercle et complexes (09.1,09.2) . . . . .                       | 135        |
| CG09-24-29 : Similitudes et longueur d'une spirale (09.O) . . . . .                             | 136        |
| JURY08-24-1807 : Système et quadrilatère (09.1) . . . . .                                       | 137        |
| <b>25 Outils (transformations)</b>                                                              | <b>139</b> |
| CG06-25-14 : Composée de deux translations et une rotation (06.2,09.1,09.2) . . . .             | 139        |
| MC06-25-9 : Triangles semblables et concours de droites (06.1) - 2 pages . . . . .              | 141        |
| SA06-25-15 : Théorème de Napoléon (06.1, 09.1) - 1 page . . . . .                               | 142        |
| SA06-25-16 : Théorème de Napoléon et similitudes (06.1) - 1 page . . . . .                      | 143        |
| SA07-25-17 : Triangles isocèles rectangles sur un triangle (07.1,09.1,09.2) - 1 page .          | 144        |
| JURY07-25-0407 : Une similitude pour une configuration(08.1,08.2) - 2 pages . . . .             | 145        |
| <b>26 Outils (aires, triangles isométriques et semblables)</b>                                  | <b>146</b> |
| MCD06-26-3 : Rapport de longueurs, d'aires (06.s, 08.s-1) . . . . .                             | 146        |
| DP04-26-10 : Théorème de Ménélaüs par les aires (00) . . . . .                                  | 147        |
| CG06-26-15 : Démonstrations par les aires (06.2) . . . . .                                      | 148        |
| SA06-26-18 : Droites perpendiculaires dans un carré (06.1, 09.1) - 1 page . . . . .             | 149        |
| SA06-26-20 : Droite de Simson (06.1) - 1 page . . . . .                                         | 150        |
| SA06-26-24 : Nature d'un triangle (06.1) - 1 page . . . . .                                     | 151        |
| SA07-26-19 : Théorème de Thalès par les aires (07.1) - 1 page . . . . .                         | 152        |
| CG08-26-27 : Des triangles semblables pour une médiatrice (08.0) - 2 pages . . . . .            | 153        |
| JURY07-26-1707 : Triangles semblables dans un demi cercle (08.1,08.2) - 3 pages .               | 154        |
| MC09-26-25 : Théorème du papillon (09.0) 2 pages . . . . .                                      | 156        |

|                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>27 Outils (géométrie analytique et produit scalaire)</b>                          | <b>157</b> |
| CG05-27-16 : Barycentres, le cube qui tombe (06.2) . . . . .                         | 157        |
| MC06-27-10 : Configuration de deux carrés (06.1, 08.1,09.1,09.2) - 3 pages . . . . . | 158        |
| MC06-27-11 : Angle au centre d'un tétraèdre régulier (06.1) - 2 pages . . . . .      | 159        |
| SA06-27-9 : Barycentre dans un tétraèdre (06.1) - 1 page . . . . .                   | 160        |
| CG07-27-22 : Distance entre deux droites de l'espace (08.1, 08.2) . . . . .          | 161        |
| CG07-27-23 : Trois plans et une sphère (07.2,09.1,09.2) . . . . .                    | 162        |
| JURY06-27-1207 : Sphère et plan (08.1,08.2) - 3 pages . . . . .                      | 163        |
| JURY06-27-0807 : Fonction et aire maximale (07.2, 09.1) - 3 pages . . . . .          | 164        |
| JURY06-27-1407 : Des barycentres et des aires (07.2,09.1,09.2) - 2 pages . . . . .   | 165        |
| DJ05-27-5 : polygones réguliers (05.2) . . . . .                                     | 166        |
| JURY08-27-2906 : Puissance d'un point par rapport à un cercle(09.1,09.2) . . . . .   | 167        |
| <b>28 Équations de surfaces</b>                                                      | <b>169</b> |
| CG07-28-1 : Points d'un cône à coordonnées entières (07.2) . . . . .                 | 169        |
| <b>29 Sections planes de surfaces, coniques</b>                                      | <b>170</b> |
| MC06-29-12 : Cône et coniques (06.1, 09.1) - 1 page . . . . .                        | 170        |
| CG06-29-24 : Cône et hyperbole (08.1, 08.2) . . . . .                                | 171        |
| <b>30 Configurations usuelles (triangle, tétraèdre, polygones réguliers) (3)</b>     | <b>173</b> |
| MCD05-30-1 : Section de tétraèdre (05.s) . . . . .                                   | 173        |
| DP04-30-11 : Construction du pentagone régulier (00) . . . . .                       | 174        |
| <b>31 Angles (orientés ou non)</b>                                                   | <b>175</b> |
| MCD05-31-2 : Rotation envoyant un cercle sur un autre (05) . . . . .                 | 175        |
| MC06-31-17 : Droite de Simson (06.1) - 1 page . . . . .                              | 176        |
| MC07-31-13 : Pythagore et Puzzle de Guogu (07.1, 08.1, 09.1) - 3 pages . . . . .     | 177        |
| <b>32 Géométrie analytique de l'espace (droites, plans, etc.)</b>                    | <b>179</b> |
| <b>33 MODE d'EMPLOI</b>                                                              | <b>179</b> |

# 1 Les ensembles de nombres

## DP04-1-1 : Développements décimaux des rationnels (00)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

### THÈME 1.

#### Nombres rationnels et décimaux.

##### 1. Exercice proposé.

- 1) À l'aide de la calculatrice, préciser les développements décimaux illimités des nombres  $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \dots$  etc. Que constate-t-on ?
- 2) Expliquer pourquoi la partie décimale du développement de  $\frac{1}{7}$  est la même que celle de  $\frac{8}{7}$ . Généraliser cette propriété.
- 3) Comparer le développement de  $\frac{1}{7}$  et celui de  $\frac{3}{7}$ . Expliquer pourquoi ils présentent un décalage d'un chiffre. Même question pour  $\frac{1}{7}$  et  $\frac{2}{7}$ . Généraliser.
- 4) Préciser les développements décimaux des nombres  $\frac{a}{13}$  pour  $a = 1, 2, \dots, 12, 14, \dots, 25$ . Étudier la partie décimale des nombres obtenus. Noter les points communs avec le cas des septièmes et les différences.
- 5) Expliquer comment on passe du développement de  $\frac{1}{13}$  à celui de  $\frac{10}{13}$  puis à celui de  $\frac{9}{13}$ . Expliquer de même comment on passe du développement de  $\frac{2}{13}$  à celui de  $\frac{7}{13}$ . Formuler une méthode générale pour prédire la partie décimale du développement de  $\frac{a}{13}$  lorsque  $a$  est un entier premier avec 13.

##### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

##### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Indiquer comment on peut calculer le développement décimal d'un nombre de la forme  $a/17$  à l'aide d'une calculatrice, même rudimentaire.

Q3. Préciser les développements décimaux des fractions de dénominateur 41.

##### Sur ses fiches le candidat présentera :

- Sa réponse aux questions Q2 et Q3.
- Un autre exercice sur le thème : *Nombres rationnels ou décimaux*.

**THÈME 1.****Nombres rationnels ou décimaux.****1. Exercice proposé.**

Les anciens égyptiens utilisaient des fractions, mais seulement de numérateur 1, c'est-à-dire de la forme  $\frac{1}{n}$ . Bien sûr, toute fraction s'écrit comme somme de fractions égyptiennes, il suffit de répéter la même fraction :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}, \quad (p \text{ fois})$$

mais on peut se demander si on peut toujours l'écrire comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents comme par exemple  $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ . Une telle écriture sera appelée une décomposition égyptienne.

**Première partie.**

1) Trouver plusieurs décompositions égyptiennes du nombre  $\frac{1}{2}$  (autres que  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ).

2) On considère la fraction  $\frac{5}{17}$ . On veut l'écrire sous forme égyptienne. On utilise le procédé suivant :

- On inverse la fraction, on obtient :  $\frac{17}{5} = 3,4$ . On prend le nombre entier 4 immédiatement supérieur à 3,4 et on calcule  $\frac{5}{17} - \frac{1}{4} = \frac{3}{68}$ .

- On inverse cette dernière fraction :  $\frac{68}{3} \simeq 22,66$ . On prend le nombre 23 > 22,66 et on calcule  $\frac{3}{68} - \frac{1}{23} = \frac{1}{1564}$ .

a) Quelle décomposition égyptienne de  $\frac{5}{17}$  obtient-on ainsi ?

b) Appliquer le même procédé à 56/107 et de 101/102. Que donne le procédé si on l'applique à une fraction plus grande que 1 (par exemple  $\frac{8}{3}$ ) ?

c) Formuler en français la règle décrivant le procédé utilisé.

**Deuxième partie.**

1) Décrire le procédé de la première partie sous forme d'algorithme, puis rédiger un programme permettant d'implanter cet algorithme sur une calculatrice programmable. Vérifier le fonctionnement de ce programme sur les exemples précédents.

2) On reprend l'exemple de  $\frac{101}{102}$ . Écrire toutes les fractions intermédiaires comme par exemple  $\frac{25}{51} = \frac{101}{102} - \frac{1}{2}$ . Que constate-t-on sur les numérateurs de ces fractions ?

3) On applique l'algorithme à une fraction  $0 < \frac{a}{b} < 1$  et on se propose de vérifier qu'il "termine" en un nombre fini de pas et qu'il effectue bien la décomposition demandée.

a) Traduire par une inégalité la condition définissant le premier entier  $n$  tel que  $\frac{1}{n}$  intervienne dans la décomposition.

b) En comparant les numérateurs de  $\frac{a}{b}$  et de  $\frac{a}{b} - \frac{1}{n}$ , montrer que l'algorithme "termine" en un nombre fini de pas.

c) Vérifier que les entiers intervenant dans la décomposition sont strictement croissants.

## 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. La question 3) de la deuxième partie est sans doute à la fois trop difficile et trop imprécise pour un élève de lycée. Proposer une rédaction plus précise de cette question.

Q3. Préciser quelles sont les caractéristiques d'un algorithme qui apparaissent dans cet exercice.

Q4. Discuter le nombre de décompositions égyptiennes d'une fraction donnée et le nombre de pas nécessaire pour obtenir le résultat dans l'algorithme proposé.

### Sur ses fiches le candidat présentera :

- Sa réponse aux questions Q2 et Q4.
- Un autre exercice sur le thème : *Nombres rationnels ou décimaux*.

## MC07-1-1 : Ecriture des nombres (07.1) - 2 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T01-MC01

Thème : Ensembles de nombres

### 1. L'exercice proposé au candidat

- 1) a) Ecrire les nombres rationnels suivants sous forme d'une fraction irréductible :

$$a = 3,75 ; b = 5,2 ; c = \frac{7,47}{4,2} ; d = 3 + \frac{1}{2,4}$$

- b) Décrire une méthode générale permettant d'écrire un nombre décimal sous forme d'une fraction irréductible

- 2) On considère dans cette question des nombres possédant une partie décimale illimitée périodique .

- a) Démontrer la formule suivante :  $0,\text{période période} \dots = \frac{\text{période (de } n \text{ chiffres)}}{99 \dots 9}$   
n fois le chiffre 9

- b) A l'aide de cette formule, écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible :  $2,727272\dots$  ;  $3,117117117117\dots$  ;  $5,4198198198\dots$

- 3) Travail réciproque : on se donne une fraction irréductible  $\frac{a}{b}$  où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

- a) Dans quel cas, la fraction représente-t-elle un nombre entier ? un nombre décimal ?

- b) Soit  $\frac{a}{b}$  un nombre rationnel non décimal. Montrer que sa partie décimale est illimitée périodique et qu'il possède une période inférieure ou égale à  $b - 1$ .

- c) Longueur de la période : on suppose que b est un nombre premier avec 10.

Démontrer que  $\frac{1}{b}$  possède une période de n chiffres si et seulement si b divise le nombre

$$N_n = 10^n - 1 = \underset{\substack{\text{n fois le chiffre 9}}}{99 \dots 9} .$$

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.

- Q.2) Ecrire un programme (sur TI92 ou équivalent) qui donne le nombre de chiffres de la période (minimale) de  $\frac{1}{b}$  dans le cas où b est un nombre premier avec 10.

- Q.3) Quels sont les deux premiers nombres de ce type possédant une période de longueur maximale ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.2)

- deux exercices traitant de l'écriture des nombres réels se rapportant au thème : Ensembles de nombres

## 2 Arithmétique ( $pgcd$ , $ppcm$ )

### DP04-2-3 : Déterminer a,b connaissant ... (00, 06.s)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

#### THÈME 2 : PGCD, PPCM.

##### 1. Exercice proposé.

Dans tout l'exercice il s'agit de déterminer deux entiers naturels  $a$  et  $b$ . On donnera d'abord une méthode générale, puis on traitera les applications numériques.

1) On donne  $p = ab$  et  $m = ppcm(a, b)$ . Applications :  $m = 360, p = 3240, m = 864, p = 5184, m = 900, p = 12500$ .

2) On donne  $s = a + b$  et  $m = ppcm(a, b)$ . Applications :  $m = 735, s = 252, m = 924, s = 275, m = 235, s = 41$ .

3) On donne  $m = ppcm(a, b)$  et  $d = pgcd(a, b)$ . Applications :  $m = 420, d = 6, m = 1050, d = 35, m = 3388, d = 23$ .

4) On donne  $m - d = ppcm(a, b) - pgcd(a, b)$ . Applications :  $m - d = 11, m - d = 15$ .

##### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

##### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Proposer une stratégie générale pour résoudre l'ensemble de l'exercice. Rédiger une indication plus précise permettant de résoudre la question 2).

Q3. Écrire un programme sur la calculatrice permettant la détermination des solutions de la question 4).

##### Sur ses fiches le candidat présentera :

- Sa réponse à la question Q2.
- Un autre exercice sur le thème :  $pgcd$  et  $ppcm$ .

# SA06-2-1 : Étude de $x^{k-1}$ (06.1) - 1 page

Dossier T02-SA01  
22/01/07

Thème : Arithmétique

## 1. L'exercice proposé au candidat

1° Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $k$  et pour tout entier naturel  $x$  :

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=x^k-1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier  $a$  supérieur ou égal à 2.

2° a) Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $d$  un diviseur positif de  $n$ .

Montrer que  $a^d - 1$  est un diviseur de  $a^n - 1$ .

b) Dédurre de la question précédente que  $2^{2004} - 1$  est divisible par 7, par 63, puis par 9.

3° Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls et  $d$  leur pgcd.

a) Montrer qu'il existe des entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $mu - nv = d$ .

b) On suppose que  $u$  et  $v$  sont strictement positifs, montrer que

$$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$$

Montrer ensuite que  $a^d - 1$  est le pgcd de  $a^{mu} - 1$  et de  $a^{nv} - 1$ .

c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de  $2^{63} - 1$  et de  $2^{60} - 1$

## Travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

## Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2  $m$  et  $n$  étant deux entiers naturels non nuls et  $d$  leur pgcd, quel est le pgcd de  $a^m - 1$  et de  $a^n - 1$  ?

Proposer une modification de la question 3° pour calculer le pgcd de  $a^m - 1$  et de  $a^n - 1$  à la place du pgcd de  $a^{mu} - 1$  et de  $a^{nv} - 1$ .

## Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.2

- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : "Arithmétique"

## 3. Quelques références au programme : Programme de spécialité de Terminale S

| CONTENUS                                                                                                                                                                 | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                                                                                                              | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Arithmétique</b>                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .<br>Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.<br>Congruences dans $\mathbb{Z}$ .<br>Entiers premiers entre eux. | On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde.<br>On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier. | On montrera l'efficacité du langage des congruences.<br>On utilisera les notations : $a \equiv b (n)$ ou $a \equiv b$ (modulo $n$ ), et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.<br>Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue. |
| Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.<br>PPCM.                                                                     | On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.                                                                                                                                                                                                                                                           | L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.                                                                                                                                                                                                     |
| Théorème de Bezout.<br>Théorème de Gauss.                                                                                                                                | Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité.<br>Exemples simples d'équations diophantiennes.<br>Applications élémentaires au codage et à la cryptographie.<br>Application : petit théorème de Fermat.                                                                                | L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.                                                                      |

# MC08-2-19 : Etude du PGCD(an+b,cn+d) (08.1) - 1 page

Préparation au CAPES – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T02-MC19

Thème : Division euclidienne, PGCD, PPCM de deux entiers

## 1. Exercice proposé au candidat :

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit les nombres entiers  $a$  et  $b$  par  $a = 5n + 2$  et  $b = 4n + 1$ 
  - a) Sur le tableur de la calculatrice, créer les colonnes  $n$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\text{pgcd}(a, b)$  à partir de  $n = 0$ .  
Conjecturer la valeur du  $\text{pgcd}(a, b)$  en fonction de  $n$ .
  - b) Démontrer la conjecture proposée au a)
2. Soit  $r$  un entier naturel.
  - a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\text{pgcd}(5n + 1, 4n + 1) = 1$
  - b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\text{pgcd}(5n + r, 4n + 1) = \text{pgcd}(n + r - 1, 4r - 5)$
  - c) Peut-on trouver d'autres valeurs de  $r$  distinctes de 1 telles que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\text{pgcd}(5n + r, 4n + 1) = 1$  ?

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1 Présenter la conjecture du 1a) à la calculatrice.  
Q.2 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : Division euclidienne, PGCD, PPCM de deux entiers

## 3. Quelques références au programme : Programme de Terminale S

### Arithmétique

|                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .<br>Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.<br>Congruences dans $\mathbb{Z}$ .<br>Entiers premiers entre eux. | On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde.<br>On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier. | On montrera l'efficacité du langage des congruences.<br>On utilisera les notations : $a \equiv b (n)$ ou $a \equiv b \pmod{n}$ , et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.<br>Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue. |
| Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.<br>PPCM.                                                                     | On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.                                                                                                                                                                                                                                                           | L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.                                                                                                                                                                                                 |
| Théorème de Bezout.<br>Théorème de Gauss.                                                                                                                                | Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité.<br>Exemples simples d'équations diophantiennes.<br>Applications élémentaires au codage et à la cryptographie.<br>Application : petit théorème de Fermat.                                                                                | L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.                                                                  |

# MC08-02-23 : Recherche de reste et de PGCD dans deux suites (08.0, 09.1) - 1 page

Préparation au CAPES – Université d'Orsay  
Dossier T02-MC23

Epreuve sur Dossier  
Thème : Division euclidienne, PGCD de deux entiers

## 1. Exercice proposé au candidat :

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit les suites de nombres entiers  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par :

$$u_n = 5n^2 + 7n + 1 \text{ et } v_n = 3n + 1.$$

- 1) a) A l'aide du tableur de la calculatrice, faire apparaître les premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , le reste  $r_n$  de la division euclidienne de  $u_n$  par  $v_n$  ainsi que le PGCD des nombres  $u_n$  et  $v_n$ .  
b) Conjecturer l'expression du reste  $r_n$  en fonction de  $n$ .  
c) Conjecturer la valeur du PGCD des nombres  $u_n$  et  $v_n$  selon les différentes valeurs de  $n$ .
- 2) Dans cette partie, on démontre la conjecture portant sur  $r_n$ .  
a) On pose  $n = 3k$  où  $k$  est un entier naturel.  
Montrer que pour tout entier naturel,  $u_n = (5k+1)v_n + 7k$ . En déduire le reste  $r_n$  en fonction de  $n$ .  
b) On pose  $n = 3k + 1$  où  $k$  est un entier naturel.  
Déterminer les entiers  $a$  et  $b$  tels que  $u_n = (5k+3)v_n + ak + b$ . En déduire le reste  $r_n$  en fonction de  $n$ .  
c) On pose  $n = 3k + 2$  où  $k$  est un entier naturel. Déterminer le reste  $r_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) En supposant vraie la conjecture faite au 1)c), quel est le PGCD des entiers  $u_n$  et  $v_n$  pour  $n = 10^{100}$ .

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Présenter les conjectures du 1. à la calculatrice.  
Q.2) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.  
Q.3) Ecrire un énoncé détaillé permettant à un élève de démontrer la conjecture sur 1)c).

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- (i) Sa réponse à la question Q.3)  
(ii) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : Division euclidienne, PGCD de deux entiers

## 3. Quelques références au programme : Programme de Terminale S

### Arithmétique

|                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .<br>Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.<br>Congruences dans $\mathbb{Z}$ .<br>Entiers premiers entre eux. | On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde.<br>On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier. | On montrera l'efficacité du langage des congruences.<br>On utilisera les notations : $a \equiv b (n)$ ou $a \equiv b \pmod{n}$ , et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.<br>Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue. |
| Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.<br>PPCM.                                                                     | On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.                                                                                                                                                                                                                                                           | L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.                                                                                                                                                                                                 |
| Théorème de Bezout.<br>Théorème de Gauss.                                                                                                                                | Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité.<br>Exemples simples d'équations diophantiennes.<br>Applications élémentaires au codage et à la cryptographie.<br>Application : petit théorème de Fermat.                                                                                | L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.                                                                  |

**Thème : Arithmétique.****1. L'exercice proposé au candidat**

On appelle diviseur propre d'un entier naturel non nul  $n$ , tout diviseur de  $n$  qui soit positif et distinct de  $n$ . Tout entier naturel non nul égal à la somme de ses diviseurs propres est dit nombre parfait. Exemple : 6 est un nombre parfait car il est égal à la somme de ses diviseurs propres soit 1, 2 et 3.

- 1) Établir la liste des diviseurs de 28 et 496 et montrer que ce sont deux nombres parfaits.
- 2) Vérifier que 28 et 496 sont de la forme  $2^n(2^{n+1} - 1)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  avec  $2^{n+1} - 1$  premier.
- 3) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $2^{n+1} - 1$  est premier alors  $2^n(2^{n+1} - 1)$  est parfait.
- 4) Illustrer par un exemple le fait que si  $2^{n+1} - 1$  n'est pas premier alors  $2^n(2^{n+1} - 1)$  n'est pas parfait.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

**Q.1)** Quels sont les outils nécessaires à la résolution de l'exercice ?

**Q.2)** Rédiger la réponse à la question 3.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2**).
- ◇ Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Arithmétique** » mettant en jeu des propriétés de certains nombres entiers.

**Thème : Arithmétique****1. L'exercice proposé au candidat :**

Pour tout entier  $n$  non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad c_n = 2 \times 10^n + 1$$

- 1) Calculer  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ .
- 2) Combien les écritures décimales des nombres  $a_n$  et  $c_n$  ont-elles de chiffres ? Montrer que  $a_n$  et  $c_n$  sont divisibles par 3.
- 3) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que  $b_3$  est premier.
- 4) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $b_n \times c_n = a_{2n}$ .  
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de  $a_6$ .
- 5) Montrer que  $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$ .  
En déduire que  $b_n$  et  $c_n$  sont premiers entre eux.

**LISTE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À 100**

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41  
43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1) Présenter un algorithme permettant d'obtenir le PGCD de deux entiers naturels non nuls.
- Q.2) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q.3) Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le même thème.

### 3 Arithmétique (décomposition en produit de facteurs premiers)

**JURY07-03-0507 : Résolution de  $x^2 - y^2 = n$  (08.1,08.2) - 2 pages**

CAPES Externe de Mathématiques 2007

Épreuve sur dossier

**Thème : Arithmétique**

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On se propose d'étudier l'existence des solutions  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  de l'équation  $(E) : x^2 - y^2 = n$ , où  $n$  est un entier naturel non nul.

- 1) a) Montrer que  $(E)$  admet au moins une solution si et seulement s'il existe deux entiers naturels  $p$  et  $q$  de même parité tels que  $n = pq$  (on pourra utiliser l'identité  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ).  
b) En déduire que si  $n$  est un entier impair,  $(E)$  admet au moins une solution.
- 2) Montrer que  $n$  est un nombre premier impair si et seulement si le couple  $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$  est l'unique solution de  $(E)$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1) Dégager les outils nécessaires à la résolution de cet exercice.
- Q.2) Quels aménagements apporteriez-vous à l'énoncé pour l'utiliser dans une classe de terminale scientifique ?

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- Sa réponse à la question Q.2).
- L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « Arithmétique ».

## DJ08-3-01 : arithmétique nombres premiers (08.0)

Préparation au CAPES, Orsay, 2005

### Thème : arithmétique Nombres premiers

#### Énoncé

On étudie des entiers naturels de la forme  $L_n = a^n + 1$  avec  $a \geq 2$

- 1) a) Prouver que si  $n$  est impair et  $n \neq 1$ ,  $L_n$  n'est pas premier  
b) En déduire que, si  $L_n$  est premier,  $n$  est une puissance de 2
- 2) Dans tout ce qui suit, on note  $F_n = 2^{2^n} + 1$  où  $n \in \mathbb{N}$ 
  - a) Étudier si  $F_n$  est premier pour  $n \in [0, 4]$
  - b) Étude de  $F_5$   
En remarquant que  $641 = 5 \cdot 2^7 + 1 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$  et en utilisant des congruences mod. 641, prouver que 641 divise  $F_5$
- 3) a) Prouver que  $\prod_{k=0}^n F_k = F_{n+1} - 2$   
b) Donner deux preuves de ce que  $F_p$  est premier à  $F_q$  pour  $p \neq q$
- 4) En étudiant l'ensemble des facteurs premiers de l'ensemble des  $F_n$ , expliquer pourquoi il y a une infinité de nombres premiers.

#### Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

#### Après avoir résolu l'exercice

- 1) Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode, et les différents outils utilisés, ainsi que le ou les niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
- 2) Quelle méthode ou quelles indications donneriez-vous à des élèves pour étudier si  $F_4$  est premier ?
- 3) Expliquez pourquoi c'est le nombre 641 dont on cherche s'il est un diviseur de  $F_5$
- 4) Proposer un exercice sur le même thème.

## 4 Arithmétique (congruences)

### DP04-4-4 : Equation diophantienne de degré 2 (00, 07.s)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

#### THÈME 4.

#### Congruences.

##### 1. Exercice proposé.

Soit  $a$  un entier, avec  $1 \leq a \leq 20$ . On considère l'équation  $3x^2 - 35y^2 = a$  et on veut préciser, selon les valeurs de  $a$ , si cette équation a des solutions  $x, y \in \mathbf{Z}$ .

a) Montrer que si on a une solution entière  $x, y$  de l'équation  $3x^2 - 35y^2 = a$ , elle vérifie  $3x^2 \equiv a \pmod{5}$ . Dresser la table des congruences des entiers modulo 5 et de leurs carrés (on pourra remarquer que tout entier est congru, modulo 5, à 0, 1, 2, -1 ou -2). Dresser la table des congruences possibles de  $3x^2$  modulo 5. En déduire que l'équation n'a pas de solution lorsque  $a$  est congru à  $\pm 1$  modulo 5. Quelles valeurs de  $a$  peut-on éliminer ?

b) En utilisant la même méthode, montrer que l'équation n'a pas de solution si  $a$  est congru à 1, 2, -3 modulo 7. Quelles valeurs de  $a$  peut-on éliminer ainsi ?

c) Appliquer la même méthode en calculant modulo 3. Quelles valeurs de  $a$  peut-on éliminer ainsi ?

d) Montrer que si on a une solution  $x, y$  de l'équation  $3x^2 - 35y^2 = a$ , elle vérifie  $-x^2 + y^2 \equiv a \pmod{4}$ . Dresser la table des congruences possibles de  $y^2 - x^2$  modulo 4. En déduire que l'équation n'a pas de solution lorsque  $a$  est congru à 2 modulo 4. Quelles valeurs de  $a$  peut-on éliminer ainsi ?

e) Montrer qu'il reste une incertitude seulement pour quatre valeurs de  $a$ . Montrer que dans ces quatre cas l'équation admet des solutions (on pourra utiliser une calculatrice).

##### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Soit  $p$  un nombre premier impair. Expliquer sur quelle propriété concernant les carrés modulo  $p$  cet exercice est construit.

Q3. Expliquer comment trouver des valeurs de  $a$  arbitrairement grandes qui mettent en défaut les méthodes utilisées dans les questions a), b), c), d) ci-dessus.

Q4. Dans le cas de l'équation  $3x^2 - 35y^2 = 97$  indiquer comment on peut tester si l'équation a des solutions  $x, y$  entières avec  $0 \leq x, y \leq 50$ .

**Sur ses fiches le candidat présentera :**

- Sa réponse aux questions Q2 et Q3.
- Un autre exercice sur le thème : *Congruences*.

# CG07-4-1 : Points d'un cône à coordonnées entières (07.2, 08.1)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

## Dossier 04-4

### Thème : Arithmétique

#### 1. L'exercice proposé au candidat

- 1) L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
  - a) Montrer que les plans  $P$  et  $Q$  d'équations respectives  $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$  et  $2x - z = 0$  ne sont pas parallèles.
  - b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$  intersection des plans  $P$  et  $Q$ .
  - c) On considère le cône de révolution  $\Gamma$  d'axe  $(Ox)$  contenant la droite  $\Delta$  pour génératrice. Montrer que  $\Gamma$  a pour équation cartésienne  $y^2 + z^2 = 7x^2$ .
- 2)
  - a) Montrer que l'équation  $x^2 \equiv 3[7]$ , dont l'inconnue  $x$  est un entier relatif, n'a pas de solution.
  - b) Puis montrer la propriété suivante : pour tous entiers relatifs  $a$  et  $b$ , si 7 divise  $a^2 + b^2$ , alors 7 divise  $a$  et 7 divise  $b$ .
- 3)
  - a) Soient  $a, b, c$  des entiers relatifs non nuls. Montrer que : si le point  $A$  de coordonnées  $(a, b, c)$  est un point du cône  $\Gamma$ , alors  $a, b$ , et  $c$  sont divisibles par 7.
  - b) En déduire que le seul point de  $\Gamma$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet du cône.

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 – Préciser les types de raisonnement utilisés pour les questions 2) et 3)b).

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Deux autres exercices variés sur le thème : Arithmétique.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de Terminale S :

Voir les paragraphes :

- Arithmétique en spécialité
- Droites et plans de l'espace
- Sections planes de surfaces en spécialité

## SA07-4-2 : Rep-units (07.1, 08.1) - 2 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T04-SA02

Thème : Arithmétique - Congruences

### 1. L'exercice proposé au candidat.

Les entiers rep-units (répétition de l'unité) sont les nombres 1, 11, 111, 1111, ... qui ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes

Pour  $k$  entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit à l'aide de  $k$  chiffres 1 :

$$N_1 = 1 ; N_2 = 11, \dots, N_k = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ chiffres } 1}$$

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.
2. a) A quelle condition sur  $k$  le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit  $N_k$  ?  
b) A quelle condition sur  $k$  le nombre 11 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit  $N_k$  ?
3. Montrer que pour tout entier  $k$  strictement positif,  $N_k = \frac{10^k - 1}{9}$
4. Soit  $k$  un entier strictement positif.
  - a) Démontrer que  $10^k \equiv 1[7]$  si et seulement si  $k$  est un multiple de 6.
  - b) En déduire que 7 divise  $N_k$  si et seulement si  $k$  est un multiple de 6.

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Dégager les méthodes et les outils nécessaires à la résolution de cet exercice.
- Q.2) Peut-on établir d'autres propriétés analogues à celle démontrée à la dernière question ?
- Q.3) Existe-t-il d'autres nombres premiers autres que ceux trouvés à la question 1. n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- deux exercices se rapportant au thème : Arithmétique - Congruences

## SA07-4-3 : Cryptographie (07.1,09.1,09.2) - 1 page

Dossier T04-SA03  
29/01/07

Thème Arithmétique

### 1. Exercice proposé au candidat :

1° Déterminer tous les couples  $(a; k)$  d'entiers relatifs tels que  $14a - 26k = 4$

2° On considère deux entiers naturels  $a$  et  $b$ . Pour tout entier  $n$ , on note  $\phi(n)$  le reste de la division euclidienne de  $an + b$  par 26. On décide de coder un message, en procédant comme suit : A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Pour chaque lettre  $\alpha$  du message, on détermine l'entier  $n$  associé, puis on calcule  $\phi(n)$ . La lettre  $\alpha$  est alors codée par la lettre associée à  $\phi(n)$ . On ne connaît pas les entiers  $a$  et  $b$ , mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a) Montrer que les entiers  $a$  et  $b$  sont tels que 
$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10 \text{ modulo } 26 \\ 19a + b \equiv 14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$$

b) En déduire qu'il existe un entier  $k$  tel que  $14a - 26k = 4$ .

c) Déterminer tous les couples d'entiers  $(a, b)$  tels que  $0 \leq a \leq 25$  et  $0 \leq b \leq 25$  et vérifiant 
$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10 \text{ modulo } 26 \\ 19a + b \equiv 14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$$

3° On suppose que  $a = 17$  et  $b = 3$ .

a) Coder le message BEZOUT.

b) Soient  $n$  et  $p$  deux entiers quelconques. Montrer que, si  $\phi(n) = \phi(p)$  alors  $17(n - p) \equiv 0 \text{ modulo } 26$ . En déduire que deux lettres distinctes sont codées par deux lettres distinctes.

c) Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $23\phi(n) + 9 - n \equiv 0 \text{ modulo } 26$ . En déduire un procédé de décodage. En déduire le décodage du message KTGZDO.

### 2. Travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 Utiliser la calculatrice pour établir la correspondance entre les nombres.

Q.2 Combien existent-ils de codages vérifiant les conditions de la question 2° et tels que deux lettres distinctes soient codées par deux lettres distinctes ?

Rajouter à l'exercice une question qui permette à l'élève de trouver ce nombre de codages.

Q.3 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.2

- plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème "Arithmétique".

### 3. Quelques références au programme : Programme de spécialité de Terminale S

| CONTENUS                                                                                                                                                                 | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                                                                                                              | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Arithmétique</b>                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .<br>Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.<br>Congruences dans $\mathbb{Z}$ .<br>Entiers premiers entre eux. | On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde.<br>On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier. | On montrera l'efficacité du langage des congruences.<br>On utilisera les notations : $a \equiv b (n)$ ou $a \equiv b \text{ (modulo } n)$ , et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.<br>Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue. |
| Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.<br>PPCM.                                                                     | On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.                                                                                                                                                                                                                                                           | L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.                                                                                                                                                                                                            |
| Théorème de Bezout.<br>Théorème de Gauss.                                                                                                                                | Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité.<br>Exemples simples d'équations diophantiennes.<br>Applications élémentaires au codage et à la cryptographie.<br>Application : petit théorème de Fermat.                                                                                | L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.                                                                             |

## DJ05-4-2 : divisibilité congruence (05.2)

Préparation au CAPES, Orsay, 2005

### Thème : arithmétique Divisibilité, congruence

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On étudie les  $x, y, z$  de  $\mathbb{N}^*$  vérifiant (1)  $x^2 + y^2 = z^2$

1°) On note  $a, b, c$  une solution.

- a) Prouver qu'au moins un des nombres  $a, b$  est multiple de 3
- b) Prouver qu'au moins un des nombres  $a, b, c$  est multiple de 5
- c) Prouver qu'au moins un des nombres  $a, b$  est multiple de 2

2°) On suppose que  $x, y, z$  sont sans diviseur commun

- a) Prouver que si  $y$  est pair, alors  $x$  et  $z$  sont impairs et que les deux entiers  $\frac{z+x}{2}$  et  $\frac{z-x}{2}$  sont premiers entre eux

- b) Prouver que  $\frac{z+x}{2}$  et  $\frac{z-x}{2}$  sont des carrés

3°) Donner la forme générale des solutions de (1)

#### 2. Le travail proposé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

#### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Dégager les méthodes, les outils, les savoirs et les niveaux mis en jeu dans cet exercice ainsi que les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Dégager le résultat de la question 2b) ; sur quelle propriété des entiers repose-t-il ?

Q3. Rédiger un énoncé de cet exercice pour des élèves de Terminale S.

Q4. Proposer un exercice sur le même thème.

Sur ses fiches le candidat rédigera la réponse aux questions Q2, Q3, Q4.

## 5 Arithmétique (équations diophantiennes $ax + by = c$ )

### DP04-5-5 : Le maire de Saint-Tricotin (00, 08.s)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

#### THÈME 5 : Équations diophantiennes $ax + by = c$ .

##### 1. Exercice proposé.

- 1) Trouver tous les entiers  $x, y \in \mathbf{Z}$  vérifiant la relation  $5544x - 2730y = 96$ .
- 2) Trouver tous les entiers  $x, y \in \mathbf{Z}$  vérifiant la relation  $5544x - 2730y = 126$ . Préciser la solution avec  $x$  et  $y \geq 0$  les plus petits possibles.
- 3) Le maire de Saint-Tricotin sur Pelote (Marne et Garonne), à la veille des élections municipales, envisage, pour s'attirer les suffrages des électeurs, de rembourser une partie  $n$  (en francs) des impôts locaux de l'année précédente. Il calcule que s'il répartit équitablement cette somme entre les 5544 contribuables de sa ville il restera 219 francs dans les caisses, tandis que s'il la répartit entre les 2730 contribuables les plus pauvres il restera 345 francs. Outre l'aspect purement politique, ce qui finalement emporte sa décision c'est que seule la deuxième solution permet de franchir le seuil psychologique des 100 francs remboursés à chacun.

À combien se monte la somme à partager ?

##### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

##### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Pour résoudre l'équation diophantienne  $132x - 65y = 3$ , un élève de collège essaie  $x = 1$  et  $y = 1$  :  $132 - 65 = 67$ , puis  $x = 1$  et  $y = 2$  :  $132 - 2 \times 65 = 2$ . Indiquer comment il peut alors procéder pour trouver une solution de l'équation (avec  $x$  et  $y$  positifs).

Q3. Écrire un programme sur une calculatrice qui permette de calculer le *pgcd* de deux entiers, ainsi que des coefficients de Bézout pour ces entiers.

##### Sur ses fiches le candidat présentera :

- Sa réponse à la question Q2.
- Un autre exercice sur le thème : *Équations diophantiennes  $ax + by = c$* .

**Thème : Arithmétique**

**1. L'exercice proposé au candidat**

- 1) Soit  $m$  un entier relatif. On note  $(E_m)$  l'équation  $11x + 13y = m$ , d'inconnue  $(x, y)$ .  
Trouver toutes les solutions  $(x, y)$  de  $(E_m)$  dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
- 2) On suppose désormais que  $m$  est un entier naturel. Montrer qu'il y a autant de solutions  $(x, y)$  de l'équation  $(E_m)$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  qu'il y a d'entiers dans le segment  $\left[\frac{5m}{11}, \frac{6m}{13}\right]$ .
- 3) Montrer que si  $m < 143$  (resp.  $m \geq 143$ ), alors l'équation  $(E_m)$  possède au plus (resp. au moins) une solution  $(x, y)$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.
- Q.2) Ecrire un algorithme renvoyant, pour un entier naturel  $m$  donné, la ou les solutions éventuelles  $(x, y)$  de l'équation  $(E_m)$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Cet algorithme pourra être implanté sur votre calculatrice ou simplement décrit au tableau dans un langage de votre choix.
- Q.3) Comment pourrait-on montrer que 119 est le plus grand entier naturel  $m$  tel que  $(E_m)$  n'ait pas de solution dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ?

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- Sa réponse à la question Q.2).
- Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « Arithmétique ».

|                      |
|----------------------|
| Thème : Arithmétique |
|----------------------|

**1. L'exercice proposé au candidat**

Un astronome a observé au jour  $J_0$ , le corps céleste  $A$ , qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ( $J_0 + 6$ ), il observe le corps céleste  $B$  dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle  $J_1$  le jour de la prochaine apparition simultanée de ces deux corps céleste aux yeux de l'astronome.

Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour  $J_1$ .

- 1) Soient  $u$  et  $v$  le nombre de périodes effectuées respectivement par  $A$  et par  $B$  entre  $J_0$  et  $J_1$ . Montrer que le couple  $(u, v)$  est solution de l'équation :

$$(E_1) \quad : \quad 35x - 27y = 2$$

- 2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x, y)$  solutions de l'équation  $(E_1)$ .  
3) Déterminer  $J_1$ .  
4) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine apparition simultanée de ces deux corps ?

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1) a) Présenter, avec votre calculatrice, le calcul du PGCD de deux entiers naturels non nuls.  
b) Présenter, avec votre calculatrice, un algorithme permettant d'obtenir une solution particulière de l'équation :

$$(E_2) \quad : \quad 35x - 27y = 1$$

Q.2) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.3) Proposer un ou plusieurs exercices sur le même thème.

## MC08-05-24 : Equation $ax+by=c$ (09.1)

Préparation au CAPES – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T05-MC24

Thème : Arithmétique, équations  $ax + by = c$

### 1. L'exercice proposé au candidat

1) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  les équations suivantes : a)  $19x + 13y = 1$  b)  $19x + 13y = 1000$

2) On doit à Euler le petit problème suivant : *Un soir dans une auberge s'arrêtent plusieurs diligences. Des hommes et des femmes, moins nombreuses, s'attablent. Chaque homme doit payer 19 sous et chaque femme 13 sous. Sachant qu'à la fin du repas, l'aubergiste a récolté exactement 1 000 sous, retrouvez combien d'hommes et de femmes ont mangé ce soir-là.*

### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Un élève fait cet exercice comme une application des théorèmes de Bézout et de Gauss. Indiquer les méthodes et les outils qu'il a pu utiliser dans cet exercice.

Q.2) Proposer un énoncé détaillé permettant à un élève de Terminale S de résoudre l'équation  $19x + 13y = 1$  sans utiliser ces deux théorèmes.

Q.3) Expliquer comment un élève de Terminale ES pourrait répondre au problème d'Euler.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- La réponse à la question Q.2).
- Les énoncés de plusieurs exercices se rapportant au thème : Arithmétique, équations  $ax + by = c$

### 3. Quelques références aux programmes

Programme de terminale S :

| CONTENUS                                                                                                                                                                 | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                                                                                                              | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Arithmétique</b>                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .<br>Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.<br>Congruences dans $\mathbb{Z}$ .<br>Entiers premiers entre eux. | On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde.<br>On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier. | On montrera l'efficacité du langage des congruences.<br>On utilisera les notations : $a \equiv b(n)$ ou $a \equiv b \pmod{n}$ , et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.<br>Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue. |
| Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.<br>PPCM.                                                                     | On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.                                                                                                                                                                                                                                                           | L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.                                                                                                                                                                                                |
| Théorème de Bézout.<br>Théorème de Gauss.                                                                                                                                | Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité.<br>Exemples simples d'équations diophantiennes.<br>Applications élémentaires au codage et à la cryptographie.<br>Application : petit théorème de Fermat.                                                                                | L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.                                                                 |

## 6 Proportionnalité

### CG05-6-2 : Rémunérations comparées et pourcentages (06.2,09.1,09.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

#### Dossier 06-2

|                                  |
|----------------------------------|
| <b>Thème : Proportionnalité.</b> |
|----------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Les vendeurs d'une société ont le choix entre trois types de rémunération mensuelle :

A : un salaire fixe de 1 500 euros.

B : une partie fixe de 1 000 euros et une partie proportionnelle aux ventes représentant 4 % de celles ci.

C : uniquement un pourcentage de 8 % sur le montant des ventes.

- 1) Soit  $x$  le montant des ventes mensuelles en euros. Déterminer les fonctions  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  donnant les rémunérations mensuelles dans les cas A, B et C en fonction de  $x$ . Tracer les représentations graphiques de ces trois fonctions sur un même repère ( unité = 1 cm pour 3 000 euros sur  $(Ox)$  et 1 cm = 300 euros sur  $(Oy)$ ).
- 2) Déterminer, intervalle par intervalle, la formule la plus intéressante pour le vendeur.
- 3) Pour quelle valeur de  $x$  le vendeur gagne-t-il 40 % de plus avec la formule C qu'avec la formule A ?
- 4) La formule A subit successivement une diminution de 10 %, puis une augmentation de 11 %. Est-elle finalement plus intéressant qu'avant ?

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Montrer comment on peut utiliser la calculatrice pour les trois premières questions de l'exercice.

Q3 - Mettre en évidence les situations de proportionnalité.

Q4 - Proposer une généralisation de la question 4).

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question 4).
- Plusieurs petits exercices sur les pourcentages, dans le but de faire acquérir à des élèves de 1° L ou de 1° STG toutes les techniques concernant ce genre de calculs.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de 1 L

Voir les paragraphes : Information chiffrée : "Pourcentages" et "Représentations graphiques".

##### Programme de 1°STG

Voir : Information chiffrée et suites numériques : "Proportions".

**Thème : La proportionnalité****1. L'exercice proposé au candidat :**

Le tableau ci-dessous reproduit une partie de la feuille de calcul de l'impôt sur le revenu de 2001. Il permet de calculer l'impôt  $I$  en fonction du revenu imposable annuel  $R$  (le tout exprimé en euros).

$$\begin{cases} \text{si } R < 4121 \text{ alors } I = 0 \\ \text{si } 4121 \leq R < 8104 \text{ alors } I = 0,075R - 309,07 \\ \text{si } 8104 \leq R < 14264 \text{ alors } I = 0,21R - 1403,12 \\ \text{si } 14264 \leq R \leq 23096 \text{ alors } I = 0,31R - 2829,52 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de la fonction qui donne  $I$  en fonction de  $R$  pour  $R \in [0, 23096]$ .
2. Le taux d'imposition est le quotient  $\frac{I}{R}$  exprimé en pourcentage. Calculer ce taux pour des revenus  $R$  de 5000, 10000, 15000 et 20000 euros.
3. Pour la tranche de revenus de 23096 euros à 37579 euros, la formule est de la forme  $I = 0,41R - a$ . Calculer  $a$ .
4. Une personne ayant un revenu imposable de 14000 euros a la possibilité de faire des heures supplémentaires, ce qui augmentera son revenu de 1000 euros. Elle prétend que "comme elle va changer de tranche", ces heures supplémentaires vont lui faire perdre de l'argent. Que pouvez-vous lui répondre ?

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1)* Indiquer les classes de Lycée ou de Collège dans lesquelles on peut proposer cet exercice ainsi que les outils mis en œuvre dans sa résolution.
- Q.2)* Tracer la courbe demandée à la question 1. à la calculatrice.
- Q.3)* Énoncer une question supplémentaire permettant d'illustrer la notion de taux marginal d'imposition (les taux marginaux dans chaque tranche de revenus sont de 7,5%, 21%, 31% et 41%).
- Q.4)* Énoncer une question supplémentaire mettant en évidence, au niveau d'une classe de Collège, le fait que  $I$  et  $R$  ne sont pas proportionnels.
- Q.5)* La formulation de la question 3. vous semble-t-elle assez complète ? Quelles améliorations proposeriez-vous ?
- Q.6)* Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le thème de la proportionnalité.



## 7 Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue (ou pouvant s'y ramener) (2)

### CG05-7-3 : Bille dans l'eau dans un cylindre (06.2, 07.2,09.1,09.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

#### Dossier 07-2

**Thème :** Equations, inéquations du premier et second degré à une inconnue (ou pouvant s'y ramener)

#### 1. L'exercice proposé au candidat

- 1) On dépose une bille sphérique de rayon 5 cm dans un récipient cylindrique de diamètre 16 cm, et on le remplit d'eau jusqu'à ce que la surface de l'eau soit tangente à la bille. Calculer le volume  $V_0$  d'eau utilisé.
- 2) On enlève la première bille et on la remplace par une bille de 7 cm de rayon. L'eau recouvre-t-elle la bille ? La bille sort-elle de l'eau ?
- 3) On enlève la deuxième bille et on la remplace par une bille de  $x$  cm de rayon avec  $0 < x \leq 8$ .
  - a) Calculer le volume  $V(x)$  nécessaire pour recouvrir exactement la bille.
  - b) On pose  $f(x) = V(x) - V_0$ . Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :
$$f(x) = \frac{4\pi}{3}(x-5)(ax^2 + bx + c).$$
  - c) Déterminer le signe de  $f(x)$  et en déduire pour quelles valeurs de  $x$  les billes sont recouvertes par l'eau.

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Peut-on intuitivement prévoir les réponses à cet exercice. Pourquoi ?

Q3 - Proposer une autre façon d'étudier le signe de  $f(x)$ .

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- Un autre exercice faisant appel au signe du trinôme, basé si possible sur une situation géométrique.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de 1 S

Voir le paragraphe Algèbre : résolution d'équations et d'inéquations du second degré.

##### Programme de T S

Voir le paragraphe Langage de la continuité et tableau de variations : Théorème (dit des valeurs intermédiaires).

## MC07-07-2 : Recherche d'un carré dans un triangle (07.1, 08.1) - 1 page

Dossier T07-MC02

Thème : Equations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue (ou pouvant s'y ramener)

19/02/07

### 1. Exercice proposé au candidat :

Dans un triangle  $ABC$ , la hauteur issue de  $A$  coupe  $(BC)$  en  $H$ ,  $BC = 4$  et  $AH = 3$ .

$K$  est un point de  $[AH]$ , la parallèle à  $(BC)$  passant par  $K$  coupe  $(AB)$  en  $M$  et  $(AC)$  en  $N$ . Les perpendiculaires à  $(BC)$  passant par  $M$  et  $N$  coupent  $(BC)$  respectivement en  $Q$  et en  $P$ .

1° Déterminer la position de  $K$  sur  $[AH]$  tel que  $MNPQ$  soit un carré.

2° Construire un triangle  $ABC$  tel que  $BC = 4$  et  $AH = 3$ , puis le carré  $MNPQ$ .

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

Q.1 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2 Présenter la construction demandée à la question 2° sur un transparent ou à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

Q.3 Si on se donne un triangle  $ABC$  quelconque, peut-on construire le carré  $MNPQ$  avec la méthode proposée dans l'exercice ?

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse aux questions Q.1 et Q.3

- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : **Equations, inéquations du premier et du second**

### 3. Quelques références au programme : Programme de seconde

#### Objectifs

- Approfondir la connaissance des différents types de nombres.
- Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction.
- Etudier quelques fonctions de référence, préparant à l'analyse.
- Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration.
- Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques.

La plupart de ces objectifs concernent les trois années de lycée.

Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration.

Lors de la résolution de problèmes, on dégagera, pour certains exemples étudiés, les différentes phases du traitement : mathématisation et mise en équation, résolution, contrôle de la cohérence des résultats et exploitation.

On exploitera les possibilités offertes par les tableurs, par les grapheurs et par les logiciels de géométrie.

| CONTENUS                                                                                     | CAPACITÉS ATTENDUES                                                                                                                                                                                                                                                                                          | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations. | Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.<br>Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.<br>Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type :<br>$f(x) = k$ ; $f(x) < k$ ; $f(x) = g(x)$ ; $f(x) < g(x)$ ; ... | Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution.<br>On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.<br>On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problèmes conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées. |

**Thème : Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue (ou pouvant s'y ramener)**

**1. L'exercice proposé au candidat**

*Voici une activité proposée par un manuel scolaire de quatrième :*

**Activité 1 Mettre un problème en équation**

**Objectifs**

- ★ Montrer l'importance du choix de l'inconnue dans la mise en équation d'un problème
- ★ Envisager avec les élèves les limites des tests d'égalité.

Lire le problème suivant :

« En 1994, l'Union des banques suisses a publié le nombre de jours de vacances payés d'un ingénieur dans plusieurs villes du monde. A Paris, un ingénieur avait 19 jours de vacances de plus qu'à Séoul (Corée du Sud) mais 5 jours de moins qu'à Madrid (Espagne). A Séoul, il avait 5 fois moins de jours de vacances qu'à Madrid. Combien de jours de vacances un ingénieur avait-il en 1994 dans chacune de ces trois villes ? »

- 1)
  - a) Dans quelle ville un ingénieur avait-il le moins de jours de vacances ? Appeler  $x$  ce nombre de jours.
  - b) Écrire en fonction de  $x$  le nombre de jours de vacances d'un ingénieur à Madrid et à Paris.
  - c) Démontrer que le nombre  $x$  est solution de l'équation :  $x + 19 = 5x - 5$ .
- 2)
  - a) Retrouver parmi les valeurs de  $x$  proposées celle qui est solution de l'équation :  
$$x = 15 ; x = 30 ; x = 10 ; x = 6 ; x = 60.$$
  - b) En déduire le nombre de jours de vacances d'un ingénieur à Séoul, à Paris et à Madrid en 1994.
- 3)
  - a) Reprendre le problème en choisissant comme inconnue  $y$  le nombre de jours de vacances d'un ingénieur à Madrid. Exprimer en fonction de  $y$  le nombre de jours de vacances d'un ingénieur à Paris et à Séoul.
  - b) Démontrer que le nombre  $y$  est solution de l'équation :  $y - 5 = \frac{y}{5} + 19$
  - c) Vérifier que le nombre de jours de vacances à Madrid trouvé à la question 2) b) est bien solution de l'équation d'inconnue  $y$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1) Commenter les différentes étapes indiquées et proposer un objectif pour chacune d'elles. Analyser plus particulièrement le rôle que les auteurs veulent faire jouer à la question 3)a).
- Q.2) Préciser les étapes importantes dans la résolution de problèmes relevant du premier degré.
- Q.3) Proposer deux autres exercices sur le même thème dont l'un au moins se situe au niveau d'une classe de première.

## 8 Systèmes linéaires

### MC07-08-3 : Tour de contrôle (07.1,09.1,09.2) - 2 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T08-MC03

Thème : Systèmes linéaires dans le cadre de la géométrie dans l'espace

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère  $(O, \overset{\cdot}{i}, \overset{\cdot}{j}, \overset{\cdot}{k})$  orthonormal. Le plan  $(O, \overset{\cdot}{i}, \overset{\cdot}{j})$  représente le sol. Les deux routes aériennes à contrôler sont représentées par deux droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9 + 3t \\ z = 2 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (D_2) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- 1) Démontrer que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  ne sont pas coplanaires.
- 2) On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées  $S\left(3; 4; \frac{1}{10}\right)$ , un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée  $(\Delta)$ .  
On note  $(P_1)$  le plan contenant S et  $(D_1)$  et on note  $(P_2)$  le plan contenant S et  $(D_2)$ .
  - a) Démontrer que le plan  $(P_1)$  a pour équation :  $-57x + 19y - 50z + 100 = 0$ .
  - b) Démontrer que  $(D_2)$  et  $(P_1)$  sont sécants.
  - c) Démontrer que  $(D_1)$  et  $(P_2)$  sont sécants.
  - d) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de  $(\Delta)$  pour que cette droite coupe chacune des droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ . Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

#### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

#### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Recenser les différentes questions où l'on peut utiliser une résolution de système linéaire dans cet exercice.
- Q.2) Proposer plusieurs résolutions de la question 2a) ?
- Q.3) Trouver une méthode qui permet de répondre à la question 2c) sans passer par une équation du plan  $(P_2)$ .

#### Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.2)
- deux exercices se rapportant au thème : Systèmes linéaires dans le cadre de la géométrie dans l'espace

## SA06-8-4 : Cercle inscrit et système (06.1) - 1 page

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

Dossier T08-SA04

10/01/05

|                                   |
|-----------------------------------|
| <b>Thème : Systèmes linéaires</b> |
|-----------------------------------|

### 1. L'exercice proposé au candidat

Soit  $ABC$  un triangle. Son cercle inscrit  $\mathcal{C}$  est tangent aux côtés  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$  respectivement en  $M$ ,  $N$  et  $P$ .

1° Calculer  $AP$ ,  $BM$  et  $CN$  dans le cas où  $AB = 7$ ,  $AC = 5$  et  $BC = 8$ .

2° Généralisation :

On pose  $AB = c$ ,  $AC = b$  et  $BC = a$ . Calculer  $AP$ ,  $BM$  et  $CN$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q.2 - Etant donnés trois réels  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  strictement positifs, existe-t-il un triangle  $ABC$  tel que  $AP = a'$ ,  $BM = b'$  et  $CN = c'$  ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question .
- Trois exercices sur le même thème.

### 3. Quelques références aux programmes

#### Programme de Quatrième

| Contenus                       | Compétences                                                                                                                                                                                                                     | Exemples d'activités, commentaires                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bissectrices et cercle inscrit | <ul style="list-style-type: none"><li>- Caractériser les points de la bissectrice d'un angle donné par la propriété d'équidistance aux deux côtés de l'angle</li><li>- Construire le cercle inscrit dans un triangle.</li></ul> | Cette caractérisation permet de démontrer que les trois bissectrices d'un triangle sont concourrantes et justifie la construction du cercle inscrit. L'analogie est faite avec le résultat concernant les médiatrices des trois côtés du triangle vu en classe de cinquième |

#### Programme de seconde

| Contenus                       | Capacités attendues                                                                                                                                  | Commentaires |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Systèmes d'équations linéaires | Déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.<br>Résoudre des problèmes conduisant à de tels systèmes. |              |

## SA07-8-5 : Trois joueurs (07.1) - 1 page

Dossier 8.3

Thème : Systèmes linéaires

11/12/06

### 1. L'exercice proposé au candidat

Trois personnes jouent à un jeu d'argent. Chaque partie du jeu a un perdant et deux gagnants. A l'issue de chaque partie, le perdant donne de l'argent à chaque gagnant de sorte que chaque gagnant double la somme qu'il possédait avant la partie.

Trois parties sont jouées. Chacun des joueurs perd une partie et après les trois parties chaque joueur possède 24 €. On demande combien d'argent avait chaque joueur au début du jeu.

1° Ecrire un système d'équations linéaires traduisant les données du problème.

2° Résoudre le problème.

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

Q.1 Expliciter la démarche générale d'un tel problème

Q.2 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q. 3 Peut-on résoudre ce problème sans utiliser de système linéaire ?

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse aux questions Q.1 et Q.3

- plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : Systèmes linéaires

### 3. Quelques références au programme :

#### Programme de seconde

| CONTENUS                       | CAPACITÉS ATTENDUES                                                                                                                         | COMMENTAIRES |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Système d'équations linéaires. | Déterminer le nombre de solutions d'un système de deux équations à deux inconnues.<br>Résoudre des problèmes conduisant à de tels systèmes. |              |

#### Programme de 1<sup>ère</sup> ES

| CONTENUS                                                                                                                          | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                    | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Algèbre</b><br>Exemples de systèmes d'équations linéaires à deux ou trois inconnues; d'inéquations linéaires à deux inconnues. | On étudiera quelques exemples simples de problèmes de programmation linéaire. | On consolidera l'interprétation géométrique des systèmes linéaires à deux inconnues; cela amènera à reconnaître directement l'équation $ux+vy+w=0$ (avec $(u,v) \neq (0; 0)$ ) comme équation de droite. |

#### Programme de TS

| CONTENUS                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | COMMENTAIRES                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Droites et plans dans l'espace</b><br>Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle.<br>Représentation paramétrique d'une droite de l'espace.<br>Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans. Discussion géométrique ; discussion algébrique. | On reprendra les problèmes d'alignement et de concours déjà abordés en classe de première.<br><br>On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont aussi l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement.<br>On traitera aussi quelques situations numériques (issues de l'analyse, de situations économiques ou autres) s'y rattachant. | Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentée par un système de deux équations linéaires. |

## 9 Systèmes d'inéquations, programmation linéaire

### CG06-9-4 : Programmation linéaire, bénéfice maximum (06.2, 07.2,09.1,09.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

#### Dossier 09-1

|                                                               |
|---------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Systèmes d'inéquations, programmation linéaire</b> |
|---------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Une entreprise fabrique deux modèles  $A$  et  $B$ . Une unité de  $A$  nécessite 1 heure de montage et une unité  $B$  en nécessite 3.

La capacité maximale de travail de l'équipe de montage est de 54 heures par jour et le nombre total d'objets  $A$  ou  $B$  que l'on peut stocker chaque jour est de 40.

- 1) Ecrire le système d'inéquations correspondant aux contraintes.
- 2) Sur le modèle  $A$ , le bénéfice de l'entreprise est de 50 euros par objet, et sur le modèle  $B$  il est de 100 euros par objet. Quelle production journalière d'objets  $A$  et  $B$  permet de maximaliser ce bénéfice ?
- 3) A partir de quel bénéfice sur  $B$ , en supposant que celui sur  $A$  est toujours de 50 euros par objet, devient-il intéressant de produire effectivement des objets de modèle  $B$  ?

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Quels sont les autres types de comportement pouvant apparaître lorsqu'on fait varier les paramètres numériques ?

Q3 - Le candidat présentera sur un transparent ou sur une calculatrice un graphique illustrant le système des contraintes.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un ou plusieurs exercices sur le même thème.

#### 3. Quelques références aux programmes

**Programme de Terminale STG, spécialités "Mercatique", "Comptabilité et finance des entreprises", et "Gestion des systèmes d'information".**

Voir le paragraphe : Information chiffrée et suites numériques – Optimisation à deux variables

## SA07-9-6 : Partage d'une somme (07.1) - 2 pages

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

Dossier T09-SA06

|                                                               |
|---------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Systèmes d'inéquations, programmation linéaire</b> |
|---------------------------------------------------------------|

### 1. L'exercice proposé au candidat

- 1) François, Bill et Kenji héritent d'une même somme en euros. Pendant les dix années suivantes, François place son capital en France au taux d'intérêt annuel de 6%, Bill et Kenji le convertissent dans les monnaies de deux pays X et Y hors de la zone euro et le placent dans ces pays respectivement au taux de 10% et 4%. Au bout de ces dix ans, l'euro a été réévalué de 40% par rapport à la monnaie du pays X et dévalué de 25% par rapport à la monnaie du pays Y. Classer les placements du plus intéressant au moins intéressant.
- 2) Plus généralement, on suppose que l'euro a été réévalué respectivement de  $x$  et  $y$  par rapport aux monnaies des pays X et Y (dans la question précédente  $x = 0,4$  et  $y = -0,25$ ). Pour quelles valeurs de  $x$  et  $y$  les trois placements sont-ils équivalents ?
- 3) On associe un point du plan à chaque couple  $(x ; y)$ . Faire un découpage du plan permettant de classer les trois placements du plus intéressant au moins intéressant.

### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q.2 - Quelle critique l'énoncé de la troisième question vous suggère-t-elle ? Reformulez cette question.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q.2.
- Un autre exercice conduisant à un régionnement de la droite ou du plan.

### 3. Quelques références aux programmes

**Programme de Terminale STG, spécialités "Mercatique", "Comptabilité et finance des entreprises", et "Gestion des systèmes d'information".**

**Information chiffrée et suites numériques :**

... Les connaissances acquises en classe de seconde et de première permettent d'aborder des situations plus complexes (étude des suites, optimisation sous contrainte) où le tableur et la calculatrice ont une place privilégiée grâce aux possibilités d'investigation qu'ils permettent...

... L'étude des suites géométriques est particulièrement approfondie en vue des applications au calcul financier.

L'optimisation linéaire est une première étape vers les fonctions de plusieurs variables qui seront abordées après le baccalauréat. La cohérence des démarches des professeurs de mathématiques et d'économie-gestion permet un apprentissage plus solide.

| Contenus                             | Capacités attendues | Commentaires                                                             |
|--------------------------------------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Suites arithmétiques et géométriques |                     | Pour les suites géométriques, on se limite aux suites à termes positifs. |

## CG07-09-18 : Gestion de portefeuille (07.2) - 2 pages

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier T09-CG18

|                                                               |
|---------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Systèmes d'inéquations, programmation linéaire</b> |
|---------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Une société est soumise à des contraintes dans la gestion de son portefeuille d'actifs financiers. Elle ne peut acheter plus de 10 000 titres en action ou en obligation et le nombre d'obligations est au plus la moitié du nombre d'actions.

Le prix d'une action est 10 € et celui d'une obligation est 20 €. La somme disponible est 120 000 €.

- 1) Sachant que les rendements escomptés sont de 18% pour les actions et de 15% pour les obligations, déterminer les achats qui permettent d'obtenir un bénéfice maximum, le raisonnement s'appuiera sur un support graphique.
- 2) Dans cette question, le rendement des actions est mal connu, entre quelles valeurs extrêmes peut-il varier sans remettre en cause la stratégie d'achat ?

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q.2 – Proposer un énoncé plus détaillé de l'exercice, pour le rendre accessible à un élève moyen.

Q.3 - Comment peut-on utiliser un tableur pour résoudre la question 1) ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q.2.
- Un autre exercice sur le même thème.

#### 3. Quelques références aux programmes

**Programme de Terminale STG, spécialités "Mercatique", "Comptabilité et finance des entreprises", et "Gestion des systèmes d'information".**

##### Information chiffrée et suites numériques :

... Les connaissances acquises en classe de seconde et de première permettent d'aborder des situations plus complexes (étude des suites, optimisation sous contrainte) où le tableur et la calculatrice ont une place privilégiée grâce aux possibilités d'investigation qu'ils permettent...

... L'optimisation linéaire est une première étape vers les fonctions de plusieurs variables qui seront abordées après le baccalauréat. La cohérence des démarches des professeurs de mathématiques et d'économie-gestion permet un apprentissage plus solide.

| Contenus                      | Capacités attendues | Commentaires |
|-------------------------------|---------------------|--------------|
| Optimisation à deux variables |                     |              |



# 10 Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence, etc.) (2)

**JURY06-10-1907 : Autour du pgcd (07.2,09.1,09.2)**

CAPES Externe de Mathématiques 2006

Épreuve sur dossier

**Thème : Divers types de raisonnements  
(par l'absurde, par récurrence,...)**

## 1. L'exercice proposé au candidat

On se propose ici d'illustrer une figure du raisonnement mathématique : le raisonnement par l'absurde.

On se donne une partie  $A$  de  $\mathbb{N}^*$ , finie et non vide.

On suppose que pour tous éléments  $m$  et  $n$  de  $A$ , l'entier  $\frac{m+n}{\text{pgcd}(m,n)}$  est encore dans  $A$ .

- 1) Montrer que l'entier 2 est élément de  $A$ .
- 2) Montrer que l'ensemble fini  $A$  ne contient que des entiers pairs.
- 3) Montrer que l'ensemble  $A$  se réduit au singleton  $\{2\}$ .

## 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

**Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :**

Q.1) Dégager les outils et méthodes nécessaires à la résolution de l'exercice.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera** au moins deux exercices illustrant le raisonnement par l'absurde, ou par contraposition, ou par « analyse-synthèse ». A cet effet, il puisera dans les domaines de la géométrie, de l'analyse, des probabilités...

**THÈME 10.****Raisonnement par récurrence.****1. Situation proposée.**

On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour  $n \geq 1$ , par la formule :

$$u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}.$$

Pour étudier la limite de  $(u_n)$  on se propose de la comparer aux suites définies par  $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  et  $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . On essaie donc de montrer par récurrence l'inégalité  $I_n : u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  ou l'inégalité  $J_n : u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . On pourra aussi considérer les suites  $\frac{1}{\sqrt{n+7}}$  ou  $\frac{1}{\sqrt{n+50}}$  ou  $\frac{1}{\sqrt{n+k}}$ .

**2. Travail demandé au candidat.**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Proposer un exercice, au niveau terminale S, portant sur la situation précédente et qui montre que le résultat le plus fort n'est pas nécessairement le plus difficile à prouver. Indiquer comment vous expliqueriez à des élèves l'apparent paradoxe rencontré ici (on pourra comparer les rapports  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ,  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  et  $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ ).

Q2. On parle souvent de "principe de récurrence". Donner un énoncé de ce principe et discuter sa nature mathématique (théorème, axiome, etc.)

Q3. Le comportement de la suite  $(u_n)$  est expliqué par un théorème donnant un équivalent de  $n!$ . Citer ce théorème et montrer son application ici.

**Sur ses fiches le candidat présentera :**

- Sa réponse à la question Q1.
- Un autre exercice sur le thème : *Raisonnement par récurrence*.

## CG06-10-5 : Recherche de trois entiers (06.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier 10-1

**Thème :** Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence ...)

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Le but de ce problème est de déterminer tous les entiers naturels  $a, b, c$  vérifiant 
$$\begin{cases} a \leq b \leq c \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$$

- 1) Peut-on avoir  $a = 1$  ?
- 2) Montrer que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$ . En déduire que  $a = 2$  ou  $a = 3$ .
- 3) Dans le cas où  $a = 2$ , montrer que  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b}$ , en déduire que  $b \in \{2, 3, 4\}$  et donner les solutions correspondantes.
- 4) Dans le cas où  $a = 3$ , montrer que  $b = 3$  et donner la solution correspondante.
- 5) Conclure.

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.  
Q2 - Expliciter les différents types de raisonnements qui apparaissent dans cet exercice, en justifiant leur validité.

Q3 - Elaborer un programme sur la calculatrice permettant de trouver les solutions dans le cas

$$a \leq b \leq c \leq d \text{ et } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un exercice au niveau seconde faisant intervenir un raisonnement par équivalences et un exercice au niveau terminale faisant intervenir un raisonnement par récurrence.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de Première et Terminale S

Généralités à propos d'une formation scientifique en première et terminale S : Voir le texte :  
"La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience ..... Enfin, apprendre à rédiger, c'est aussi acquérir la maîtrise d'une forme particulière d'écriture, mêlant langue usuelle, signes et symboles spécifiques."

## MC06-10-4 : Rep-units (06.1) - 2 pages

Préparation au CAPES 2006 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T10-MC04

Thème : Divers types de raisonnement

### 1. L'exercice proposé au candidat.

Les entiers rep-units (répétition de l'unité) sont les nombres 1, 11, 111, 1111, ... qui ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1.

Pour  $k$  entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit à l'aide de  $k$  chiffres 1 :

$$N_1 = 1 ; N_2 = 11, \dots, N_k = \underbrace{11\dots1}_{k \text{ chiffres } 1}$$

1. Montrer que si  $N_k$  est un nombre premier alors  $k$  est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1. On suppose que le chiffre des unités de  $n^2$  est 1.
  - a) Montrer que  $n$  se termine par 1 ou 9
  - b) Montrer qu'il existe un entier  $m$  tel que  $n$  s'écrit sous la forme  $10m + 1$  ou  $10m - 1$
  - c) En déduire que  $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$
3. Montrer qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Présenter les différents types de raisonnement qui apparaissent en arithmétique en Seconde et en Terminale S.
- Q.2) A l'aide d'un programme sur la calculatrice, déterminer les nombres premiers parmi les 13 premiers rep-units.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- un programme répondant à la question Q.2) ainsi que la réponse obtenue
- plusieurs petits exercices de nature arithmétique se rapportant au thème: divers types de raisonnement.

**Thème : Divers types de raisonnement**  
(par l'absurde, par récurrence, ...)

**1. L'exercice proposé au candidat**

On appelle  $E$  l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  de réels strictement positifs qui vérifient les deux inégalités strictes  $xyz > 1$  et  $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ . On cherche à établir quelques propriétés de  $E$ .

- 1) Soit  $(a, b, c)$  un élément de  $E$ .
  - a) Démontrer que  $\max(a, b, c) > 1$  ;
  - b) Démontrer que  $\min(a, b, c) < 1$  ;
  - c) Démontrer que  $a, b$  et  $c$  sont tous les trois différents de 1.
- 2) Déterminer tous les éléments de  $E$  qui sont de la forme  $(x, \frac{1}{2x}, \frac{1}{2x})$ , où  $x$  est un réel strictement positif. En déduire que l'ensemble  $E$  est infini.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1) Dégagez les outils et méthodes nécessaires à la résolution de l'exercice.
- Q.2) Proposez au moins deux exercices assez courts illustrant des figures classiques du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, par récurrence, utilisation d'exemples et de contre-exemples, etc...). On pourra puiser dans les domaines du dénombrement, de l'arithmétique, de la géométrie.

**Thème : Divers types de raisonnements  
(par l'absurde, par récurrence...).**

## 1. L'exercice proposé au candidat

Étant donné un entier naturel  $n \geq 2$ , on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{2^n}$ .

- 1) Cas où  $n = 2$  : Montrer que 1, 3 et 5 sont solutions du problème.
- 2) On suppose dorénavant que  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons qu'il existe trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{2^n}$ .
  - a) Montrer que les entiers  $x, y$  et  $z$  sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
  - b) On suppose que  $x$  et  $y$  sont pairs et que  $z$  est impair. Montrer qu'on a alors  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$  et en déduire une contradiction.
  - c) On suppose que  $x, y$  et  $z$  sont impairs. Montrer qu'on a  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{8}$  et conclure.

## 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.
- Q.2) Présenter une correction détaillée de la question 2)c) telle que le candidat la proposerait à des élèves de Terminale S.

***Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :***

- ◇ Sa réponse à la question Q.2).
- ◇ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...)** ».

# 11 Calcul matriciel

## DP06-11-37 : Dextrose et lévulose (06.2, 08.2)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

### THÈME 11.

#### Calcul matriciel.

##### 1. Exercice proposé.

Le glucose admet deux isomères, l'un dextrogyre (c'est-à-dire qui dévie la lumière vers la droite), le dextrose, l'autre lévogyre, le lévulose. Dans une certaine réaction chimique, dite de Pierre Landin, une partie du dextrose se transforme en lévulose et vice-versa. Précisément, au cours d'une unité de temps, 60% des molécules de dextrose se transforment en lévulose et les 40% restant demeurent sous forme dextrose, tandis que 35% des molécules de lévulose restent sous forme lévulose et que les 65% autres deviennent dextrose.

On appelle  $d_n$  et  $l_n$  les proportions de dextrose et de lévulose au temps  $n$  dans le mélange (l'unité de temps est l'heure). On suppose qu'on a, au départ,  $d_0 = 1$  et  $l_0 = 0$ .

On note  $U_n$  le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que le phénomène se traduit par une égalité matricielle de la forme  $U_{n+1} = AU_n$  où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  que l'on précisera. En déduire qu'on a  $U_n = A^n U_0$ .

2) Calculer  $U_1, U_2, U_3$ . Interpréter les résultats en termes de proportions de chaque composant.

3) À l'aide de la calculatrice, calculer  $A^n$  pour  $n = 10, 20, 30$ . Que constate-t-on ? Qu'en déduit-on pour les proportions de dextrose et de lévulose ?

4) On pose  $B = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,52 \\ 0,48 & 0,48 \end{pmatrix}$ . Calculer  $B - A$  et  $C = 4(B - A)$ .

a) Calculer les puissances  $B^2, B^3, \dots, B^n$ .

b) Calculer  $C^2, C^3, \dots, C^n$ .

c) Calculer  $BC$  et  $CB$ .

d) Déduire de ce qui précède la formule :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,52 + (-0,25)^n \cdot 0,48 & 0,52(1 - (-0,25)^n) \\ 0,48(1 - (-0,25)^n) & 0,48 + (-0,25)^n \cdot 0,52 \end{pmatrix}.$$

e) Calculer  $d_n$  et  $l_n$  et déterminer les limites de  $d_n$  et  $l_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

##### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

**THÈME 11.****Calcul matriciel.****1. Exercice proposé.**

Un compte bancaire peut être créancier (dans le “vert”) ou débiteur (dans le “rouge”). L'évolution mensuelle du compte d'André Plinier est telle que :

- Lorsque son compte est dans le vert à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est de 0,4 tandis que la probabilité qu'il soit dans le rouge est de 0,6.

- Lorsque son compte est dans le rouge à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est de 0,35 tandis que la probabilité qu'il soit dans le vert est de 0,65.

On appelle  $p_n$  la probabilité que le compte soit dans le vert à la fin du  $n$ -ième mois. On suppose qu'à l'instant initial le compte est dans le vert, c'est-à-dire qu'on a  $p_0 = 1$ . On note  $U_n$  le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} p_n \\ 1 - p_n \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que le phénomène se traduit par une égalité matricielle de la forme  $U_{n+1} = AU_n$  où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  que l'on précisera. En déduire qu'on a  $U_n = A^n U_0$ .

2) Calculer  $p_1, p_2, p_3$ . Interpréter les résultats.

3) À l'aide de la calculatrice, calculer  $A^n$  pour  $n = 10, 20, 30$ . Que constate-t-on ?

4) On pose  $B = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,52 \\ 0,48 & 0,48 \end{pmatrix}$ . Calculer  $B - A$  et  $C = 4(B - A)$ .

a) Calculer les puissances  $B^2, B^3, \dots, B^n$ .

b) Calculer  $C^2, C^3, \dots, C^n$ .

c) Calculer  $BC$  et  $CB$ .

d) Déduire de ce qui précède la formule :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,52 + (-0,25)^n \cdot 0,48 & 0,52(1 - (-0,25)^n) \\ 0,48(1 - (-0,25)^n) & 0,48 + (-0,25)^n \cdot 0,52 \end{pmatrix}.$$

e) Calculer  $p_n$  et déterminer la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

**2. Travail demandé au candidat.**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**



**THÈME 11.**  
**Calcul Matriciel .**

**1. Exercice proposé.**

Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi: chaque année 40% des habitants de la capitale quitte celle-ci tandis que 20% du reste de l'île vient y habiter. On néglige les autres échanges.

On note  $c_n$  la population dans la capitale au bout de  $n$  années,  $b_n$  la population dans le reste de l'île au bout de  $n$  années et on introduit le vecteur colonne  $P_n = \begin{pmatrix} c_n \\ b_n \end{pmatrix}$  qui représente la composition de la population au bout de  $n$  années. La population initiale est notée  $P_0$ .

1) Décrire la population au bout de 2 années.

2) Montrer que l'évolution de la population se traduit par une écriture matricielle de la forme  $P_{n+1} = AP_n$  où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  que l'on précisera.

En déduire que  $P_n = A^n P_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

3) On choisit comme composition initiale de la population  $c_0 = 12000$  et  $b_0 = 5000$ . A l'aide de la calculatrice, calculer la composition de la population au bout de 10 puis 20 années.

4) On choisit comme composition initiale de la population  $c_0 = 12000$  et  $b_0 = 24000$ . A l'aide de la calculatrice, calculer la composition de la population au bout de 10 puis 20 années. Que constatez-vous?

5) On introduit la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ .

a) Calculer les matrices  $A - B$  et  $C = \frac{5}{2}(A - B)$ .

b) Calculer les matrices:  $B, B^2, \dots, B^n, C, C^2, \dots, C^n$  puis  $BC$  et  $CB$ .

c) En utilisant les questions précédentes montrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{5})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{2}{5})^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(\frac{2}{5})^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{2}{5})^n \end{pmatrix}.$$

d) Exprimer  $c_n$  et  $b_n$  en fonction de  $c_0$  et  $b_0$  et déterminer leurs limites quand  $n \rightarrow +\infty$ .

e) Expliquer les résultats observés à la calculatrice dans les questions 3) et 4)

**2. Travail demandé au candidat.**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation le candidat traitera les questions suivantes:**

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

2. Proposer une solution de la question 5 pour des élèves de Première ES option mathématique. On s'attachera à expliquer le résultat observé à la question 4.

Peut-on trouver d'autres conditions initiales  $P_0$  pour lesquelles le comportement de  $P_n$  est celui observé à la question 4.

3. Pour étudier l'évolution de la composition de la population, on peut utiliser un autre outil: les suites arithmétiques géométriques. Modifier l'énoncé proposé afin d'utiliser cet outil.



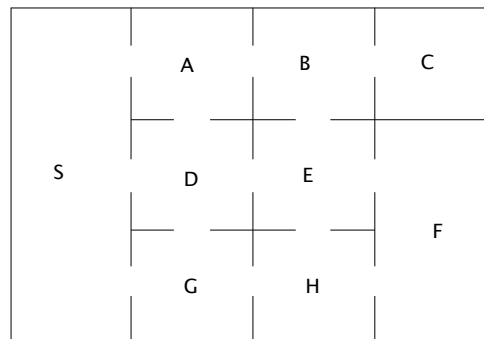
## 12 Théorie des graphes

### DP04-12-7 : Le graphe du musée (05.1, 05.2, 07.1, 07.2, 09.1, 09.2)

#### THÈME 12 : Théorie des graphes

### 1 Exercice proposé

Un musée est constitué de 9 salles notées A,B,C,D,E,F,G,H et S. Le plan du musée est donné ci-dessous.



On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée, ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

- 1) Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
- 2) Est-il possible de visiter le musée en empruntant chaque porte une fois et une seule ?
- 3) Pour rompre une éventuelle monotonie, le conservateur du musée souhaite différencier chaque salle de sa ou de ses salles voisines (c'est-à-dire accessible par une porte) par la moquette posée au sol.  
Quel est le nombre minimum de types de moquettes nécessaires pour répondre à ce souhait ?
- 4) Est-il possible, en effectuant des travaux, que chaque salle soit reliée à trois autres exactement ?

### 2 Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Proposer un complément à cet exercice qui permette (à l'aide de la calculatrice) de dénombrer le nombre de chemins qui vont de  $D$  à  $D$  en 4 étapes ou de déterminer explicitement les chemins qui vont de  $S$  à  $C$  toujours en 4 étapes. Peut-on toujours joindre deux sommets quelconques du graphe en 4 étapes ?

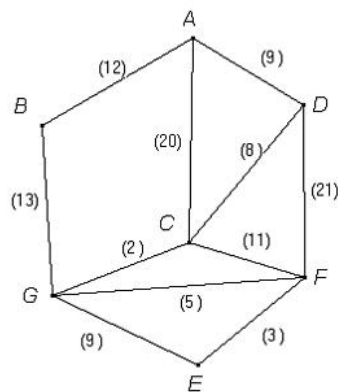
Q3. Proposer un ou plusieurs problèmes, dans d'autres situations concrètes que celle du musée évoquée dans l'exercice, qui conduisent tous au même graphe que celui étudié ci-dessus et où les réponses sont données de manière identique à celles des questions 2,3,4 de l'énoncé.

**Sur ses fiches le candidat présentera :**

- Sa réponse aux questions Q2 et Q3.
- Un autre exercice utilisant la théorie des graphes.

**Thème : Théorie des graphes****1. L'exercice proposé au candidat**

Des touristes sont logés dans un hôtel noté  $A$ . Un guide fait visiter six sites touristiques notés  $B, C, D, E, F$  et  $G$ . Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètre des différents tronçons.



- 1) A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ?
- 2) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.
- 3) Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel  $A$  au site  $E$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Préciser les notions relatives aux graphes sur lesquelles est bâti cet exercice.
- Proposer un ou plusieurs exercices développant d'autres notions relatives aux graphes.

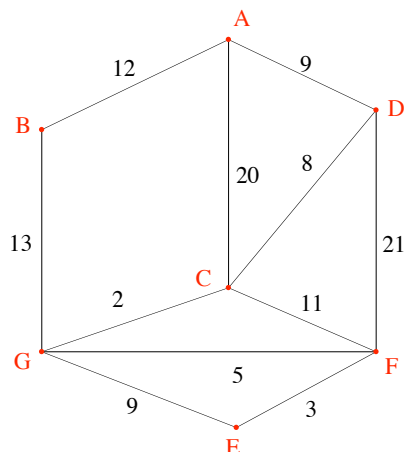
## THÈME 12

### Théorie des graphes

Ce sujet est inspiré d'un dossier donné au CAPES 2005.

#### 1 Exercice proposé

Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. Un guide fait visiter six sites touristiques notés B, C, D, E, F, G. Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



- 1) À partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ?
- 2) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.
- 3) Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E.

#### 2 Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Proposer un énoncé complémentaire, utilisant le même graphe, et menant au coloriage de celui-ci.

Sur ses fiches, le candidat présentera sa réponse à la question Q2 ainsi qu'un ou plusieurs autres exercices se rapportant au thème : *Théorie des graphes*.

Documents joints : extraits du programme de terminale ES concernant les graphes.

## 13 Problèmes d'incidence (alignement et concours) (2)

### DP04-13-8 : Théorème de Ceva (00, 05.s)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

#### THÈME 13.

##### Alignement et concours.

###### 1. Exercice proposé.

Soit  $ABC$  un triangle,  $A', B', C'$  trois points distincts des sommets appartenant respectivement aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ . On considère la relation :

$$(*) \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

1) Montrer que si les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont concourantes la relation  $(*)$  est vérifiée. (On pourra écrire le point de concours des trois droites comme barycentre des sommets du triangle.)

2) Montrer que si les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont parallèles la relation  $(*)$  est vérifiée.

3) Montrer que si la relation  $(*)$  est vérifiée et si  $(AA')$  est parallèle à  $(BB')$ , alors  $(CC')$  est parallèle à  $(AA')$ .

4) Montrer que si la relation  $(*)$  est vérifiée et si  $(AA')$  coupe  $(BB')$ , alors les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont concourantes.

5) Montrer que, dans un triangle, les droites joignant un sommet et le point de contact du cercle inscrit avec le côté opposé sont concourantes.

###### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

###### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Préciser quelle stratégie assez générale on peut proposer aux élèves pour traiter des questions de réciproques comme 3) et 4).

Q3. Analyser avec précision les résultats de convexité sous-jacents dans la question 5.

###### Sur ses fiches le candidat présentera :

- Sa réponse à la question Q2.
- Un autre exercice sur le thème : *Alignement et concours*.

**THÈME 13.**

**Alignement et concours.**

**1. Exercice proposé.**

Soit  $ABC$  un triangle,  $D$  et  $E$  deux points appartenant respectivement à  $[AC]$  et  $[AB]$  et distincts de  $A, B, C$ . On note  $F$  le point d'intersection de  $(BD)$  et  $(CE)$  et  $I$  (resp.  $J$ ) le point d'intersection de  $(AF)$  et  $(BC)$  (resp.  $(DE)$ ).

1) On suppose que les droites  $(BC)$  et  $(DE)$  sont parallèles. Montrer que  $I$  et  $J$  sont les milieux de  $[BC]$  et  $[DE]$  respectivement.

2) Énoncer et démontrer une réciproque.

3) a) Construire le milieu d'un segment à l'aide d'une règle à deux bords rectilignes (sans compas).

b) On se donne un segment  $[BC]$ , son milieu  $I$ , un point  $D$  en dehors de  $(BC)$ . Tracer à la règle seule la parallèle à  $(BC)$  passant par  $D$ .

**2. Travail demandé au candidat.**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Préciser quelle stratégie assez générale on peut proposer aux élèves pour traiter des questions de réciproques comme 2).

Q3. Indiquer précisément pourquoi les droites  $(BD)$  et  $(CE)$  se coupent. Même question pour  $(AF)$  et  $(BC)$  ou  $(DE)$ .

Q4. Donner une autre preuve des points 1) et 2) à l'aide des transformations. A quel niveau peut-on proposer cette preuve ?

**Sur ses fiches le candidat présentera :**

- Sa réponse aux questions Q2 et Q4.
- Un autre exercice sur le thème : *Alignement et concours*.

## DP04-13-10 : Théorème de Ménélaüs par les aires (00)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

### THÈME 13.

#### Alignement et concours.

##### 1. Exercice proposé.

###### Partie A

Soit  $ABC$  un triangle et soit  $O$  un point du plan non situé sur les droites  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ . On suppose que la droite  $(AO)$  coupe  $(BC)$  en  $A'$ . Montrer qu'on a les égalités de rapports d'aires :

$$\frac{\mathcal{A}(AA'B)}{\mathcal{A}(AA'C)} = \frac{\mathcal{A}(OA'B)}{\mathcal{A}(OA'C)} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(OAB)}{\mathcal{A}(OAC)}.$$

###### Partie B

Soit  $ABC$  un triangle,  $A', B', C'$  trois points distincts des sommets appartenant respectivement aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ .

1) On suppose  $A', B', C'$  alignés. Montrer qu'on a la relation :

$$(*) \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

(On interprétera les rapports, au signe près, comme des rapports d'aires.)

2) Réciproquement, montrer que si la relation  $(*)$  est vérifiée les points  $A', B', C'$  sont alignés.

##### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

###### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Discuter les cas de figures possibles. Comment, éventuellement avec d'autres outils, pourrait-on s'affranchir de cette étude ?

Q3. Indiquer comment on pourrait prouver le résultat de B1 en utilisant les homothéties.

###### Sur ses fiches le candidat présentera :

- Sa réponse aux questions Q2 et Q3.
- Un autre exercice sur le thème : *Alignement et concours*.

## MCD06-13-5 : Milieux des côtés et des diagonales dans un quadrilatère convexe (06.s)

Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique  
CAPES 2006 - Soutien Oral

### Thème 13 : Problèmes d'incidence (alignement et concours)

#### I. EXERCICE PROPOSÉ

Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe. On appelle  $I, J, K, L, M, N$  les milieux respectifs des segments  $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD]$ .

1. Montrer que  $[IK]$  et  $[JL]$  se coupent en leur milieu noté  $G$ . (On pourra utiliser l'associativité du barycentre.)
2. Montrer que  $G$  est aussi le milieu de  $[MN]$ .
3. Soit  $A'$  le centre de gravité de  $BCD$ .
  - a. Montrer que  $A, A'$  et  $G$  sont alignés.
  - b. Énoncer trois autres alignements du type de celui de la question 3.a

#### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

#### Q1. Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- a. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(s) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
- b. Donner une méthode pour une résolution des deux premières questions au niveau collège.
- c. Proposer une caractérisation du parallélogramme à l'aide de l'isobarycentre de ses sommets et de ses diagonales (resp. de ses médianes et diagonales) ?
- d. À quoi sert l'hypothèse de convexité ?

#### Q2. Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- a. sa réponse aux questions Q1.b, Q1.c. et Q1.d. du jury.
- b. un ou plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : alignement et concours.

*Le programme de première est disponible dans la salle.*

# SA06-13-7 : Barycentre et bissectrices (06.1) - 1 page

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

## Dossier T13-SA07

|                                                               |
|---------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Problèmes d'incidence : alignement et concours</b> |
|---------------------------------------------------------------|

### 1. L'exercice proposé au candidat

On considère un triangle  $ABC$  non aplati et on note  $a, b, c$  les longueurs des côtés  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ .  
On note  $\Delta$  la bissectrice intérieure du triangle  $ABC$  issue de  $A$ .  $\Delta$  coupe  $[BC]$  en  $I$ .

1° La parallèle à  $\Delta$  passant par  $C$  coupe  $(AB)$  en  $K$ .

- Quelle est la nature du triangle  $ACK$  ?
- Montrer que  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(B, b)$  et  $(C, c)$ .

2° Montrer en utilisant un barycentre que les bissectrices intérieures du triangle  $ABC$  sont concourantes.

### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q.2 - Quelle autre méthode peut-on utiliser pour démontrer le résultat de la question 1° ?

Q.3 - Peut-on avec une méthode analogue à celle qui est proposée dans l'exercice démontrer qu'une bissectrice intérieure du triangle  $ABC$  et les bissectrices extérieures issues des deux autres sommets sont concourantes ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q.2.
- Un autre exercice sur le même thème.

### 3. Quelques références aux programmes

#### Programme de 1°S

| Contenus                                                                                                                        | Modalités de mise en oeuvre                                                                                     | Commentaires                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Géométrie vectorielle</b><br>Barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace.<br>Associativité du barycentre | On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites. | La notion de barycentre, utile en physique et en statistiques, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera toute technicité. |

## SA07-13-8 : Parallélogramme et homothétie (07.1) - 1 page

T13-SA08

Thème : Problèmes d'incidence.

Parallélisme, concours, alignement.

### Exercice proposé au candidat :

$ABCD$  est un parallélogramme et  $M$  un point du segment  $[BD]$ .

La parallèle à  $(AD)$  passant par  $M$  coupe la droite  $(AB)$  en  $I$  et la droite  $(CD)$  en  $J$ .

La parallèle à  $(AB)$  passant par  $M$  coupe la droite  $(AD)$  en  $K$  et la droite  $(BC)$  en  $L$ .

1° On suppose que les droites  $(IK)$  et  $(BD)$  se coupent en  $R$ .

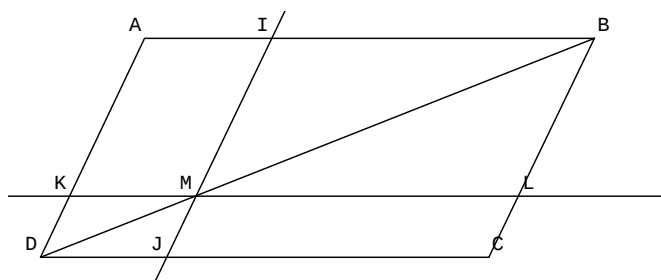
Soit  $h$  l'homothétie de centre  $R$  qui transforme  $I$  en  $K$ .

a) Déterminer successivement les images par  $h$  des points  $M$ ,  $B$  et  $L$ .

b) Montrer que les droites  $(IK)$ ,  $(JL)$  et  $(BD)$  sont concourantes.

2° On suppose que la droite  $(IK)$  est parallèle à  $(BD)$ .

Démontrer que la droite  $(JL)$  est aussi parallèle à  $(BD)$



### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

Q.1 Illustrer les résultats à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

Q.2 Quels cas particuliers devrait-on distinguer à la question 1° ?

Q.3 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse à la question Q.2

- plusieurs énoncés d'exercices portant sur le parallélisme, le concours ou l'alignement et dont la résolution fait appel

aux transformations.

*Quelques références au programme :*

Programme de 1<sup>ère</sup> S

| Transformations                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle). | Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie. | Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier |

Programme de seconde :

| Les configurations du plan.                      | Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. | Les problèmes seront choisis de façon                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Triangles isométriques, triangles de même forme. | Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.                  | - à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité,<br>- à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive,<br>- à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque).<br>À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non.<br>On pourra utiliser la définition suivante : "deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre" (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme.<br>Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), |

## SA07-13-9 : Tétraèdre et barycentre (07.1, 08.s) - 1 page

voir aussi SA06-27-21

Dossier T13-SA09

Thème : Problème d'incidence  
Concours

### Exercice proposé au candidat:

$ABCD$  est un tétraèdre.  $M$  et  $N$  sont les milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[BD]$

On définit les points  $I, J, K$  et  $L$  par  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  ;  $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$  ;  $\overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ .

1° En utilisant un barycentre, démontrer que les droites  $(IK)$ ,  $(JL)$  et  $(MN)$  sont concourantes en un point  $G$  que l'on définira.

2° On désigne par  $P$  le milieu de  $[CN]$ . Démontrer que la droite  $(AP)$  passe par  $G$  et préciser la position de  $G$  sur le segment  $[AP]$

3° La droite  $(BG)$  coupe le plan  $(ACD)$  en  $Q$ . Démontrer que  $Q$  appartient au segment  $[DM]$  et préciser la position de  $Q$  sur  $[DM]$

Références : 58 p 346 du Déclic de 1<sup>ère</sup> S édition 2001

### Travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1 Quelles indications ou questions supplémentaires ajouteriez-vous à l'énoncé pour le proposer à une classe.

Q.2 Dégager les méthodes et les différentes propriétés mises en jeu pour résoudre l'exercice

### Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse aux questions Q.1 et Q.2.

- plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : "**Problème d'incidence : Concours**"

### Quelques références au programme : Programme de 1<sup>ère</sup> S

| CONTENUS                                                                                                                                                             | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                         | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Géométrie vectorielle</b><br>Calcul vectoriel dans l'espace.<br><br>Barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace. Associativité du barycentre. | On étendra à l'espace les opérations sur les vecteurs du plan. On introduira la notion de vecteurs coplanaires.<br>On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites. | La notion de barycentre, utile en physique et en statistique, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera toute technicité. On n'étendra pas le produit scalaire à l'espace. |

## CG05-13-19 : Triangles isocèles et cocyclicité (06.2) - 2 pages

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

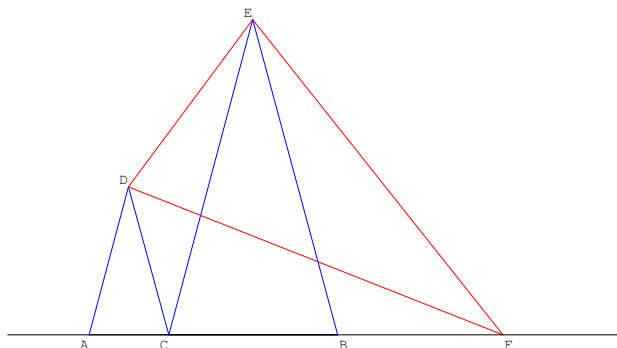
### Dossier T13-CG 06

|                                                               |
|---------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Problèmes d'incidence : alignement et concours</b> |
|---------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On donne un segment  $[AB]$  et un point  $C$  sur  $]AB[$ . Du même côté de  $(AB)$  on construit les triangles  $ADC$  et  $CEB$ , isocèles respectivement en  $\hat{D}$  et  $\hat{E}$  et tels que  $\widehat{ADC} = \widehat{CEB}$ . Puis on construit le triangle  $EFD$ , isocèle en  $\hat{F}$  tel que  $\widehat{EFD} = \widehat{ADC}$ . On cherche à montrer que le point  $F$  appartient à  $(AB)$ .

- 1) Montrer que les points  $D$ ,  $E$ ,  $F$  et  $C$  sont cocycliques.
- 2) En déduire que  $\widehat{ECF} = \widehat{ECB}$ .
- 3) Conclure.



#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - La cocyclicité n'est pas au programme du secondaire. Quelle propriété proposez-vous d'admettre, ou quel cas particulier pouvez-vous traiter, qui permettrait à un élève de Troisième de faire cet exercice ?

Q2 - L'énoncé vous paraît-il suffisamment précis ? Y a-t-il d'autres cas de figure ? Reformuler un énoncé qui soit complètement rigoureux.

Q3 – Indiquer les méthodes et outils utilisés pour résoudre l'exercice.

Q4 - Expliquez comment vous illustreriez cet exercice avec la calculatrice en faisant plusieurs dessins à partir d'un élément variable.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un autre exercice faisant intervenir le calcul d'angles pour prouver une colinéarité.

**Thème : Problèmes d'incidence**  
Concours

**1. L'exercice proposé au candidat**

Soit  $ABC$  un triangle quelconque. On pose  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ . On note  $U$  le barycentre de  $B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients  $b$  et  $c$ .

- 1) On note  $B_0$  le point défini par  $\overrightarrow{AB_0} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB}$ . Exprimer  $B_0$  comme barycentre de  $A$  et  $B$ .
- 2) On note  $C_0$  le point défini par  $\overrightarrow{AC_0} = \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}$ . Exprimer  $C_0$  comme barycentre de  $A$  et  $C$ .
- 3) Montrer que  $AB_0UC_0$  est un losange.
- 4) Montrer que  $(AU)$  est la bissectrice intérieure de  $\widehat{A}$  dans le triangle  $ABC$ .

On considère le point  $I$  barycentre de  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

- 5) Montrer que  $I$  est le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

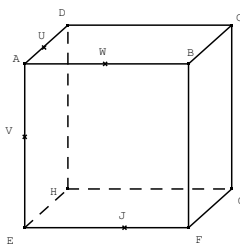
*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1) Détailler les différentes propriétés mises en jeu pour résoudre l'exercice.*
- Q.2) Proposer un ou plusieurs exercices mettant en jeu des barycentres dans un problème de concours de droites du plan ou de l'espace.*

**Thème : Problèmes d'incidence**

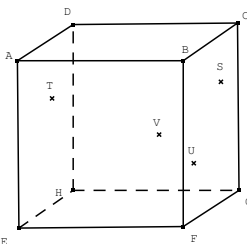
**1. L'exercice proposé au candidat :**

1. La figure ci-dessous représente un cube  $ABCDEFGH$  ainsi que 4 points  $U, V, W$ , et  $J$  respectivement situés sur  $[AD]$ ,  $[AE]$ ,  $[AB]$  et  $[EF]$ .



Tracer sur la figure jointe (page 3) l'intersection des faces du cube avec le plan parallèle à  $(UVW)$  passant par  $J$ .

2. La figure ci-dessous représente un cube  $ABCDEFGH$  ainsi que 2 points  $T, V$  appartenant à la face  $ABFE$  et 2 points  $S, U$  appartenant à la face  $BCGF$ .



Les droites  $(ST)$  et  $(VU)$  sont-elles sécantes ?

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

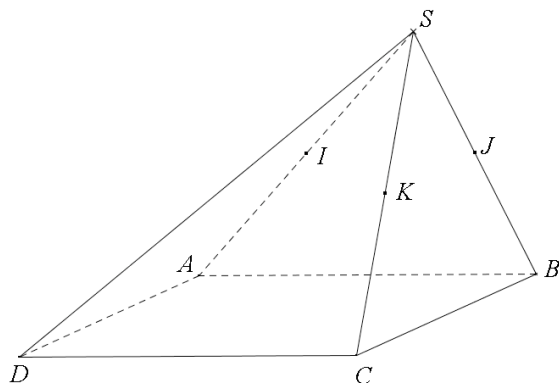
- Q.1) Énoncer les théorèmes mis en jeu dans l'exercice.  
Q.2) Sur la figure de la question 2. reproduite page 3, rectifier la position du point  $U$  pour que les droites  $(TS)$  et  $(VU)$  se coupent effectivement.  
Q.3) Proposer un ou plusieurs exercices portant sur le parallélisme, l'alignement ou l'incidence dans l'espace.

*La page 3 complétée sera remise au Jury*

**Thème : Problèmes d'incidence****1. L'exercice proposé au candidat**

Soit un parallélogramme  $ABCD$  situé dans un plan  $\mathcal{P}$  et soit  $S$  un point de l'espace n'appartenant pas à  $\mathcal{P}$ . On note respectivement  $I, J$  et  $K$  les milieux des segments  $[SA]$ ,  $[SB]$  et  $[SC]$ .

- 1) a) Montrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $(IJK)$  sont parallèles.  
b) Montrer que le plan  $(IJK)$  coupe  $[SD]$  en son milieu.
- 2) Quelle est l'intersection des plans  $(CIJ)$  et  $\mathcal{P}$  ?
- 3) En déduire l'intersection des plans  $(CIJ)$  et  $(SAD)$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1)** Énoncer les théorèmes mis en jeu dans l'exercice.  
**Q.2)** Présenter un corrigé de la question 1) pouvant être présenté à une classe de lycée.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- a) Sa réponse à la question Q.2).
- b) Plusieurs énoncés d'exercices, dans la mesure du possible variés par le niveau concerné et la méthode de résolution utilisée, se rapportant au thème : « **Problèmes d'incidence** ».

# 14 Parallélisme et orthogonalité

## MC07-14-5 : Tétraèdre orthocentrique (07.1, 08.1) - 1 page

Dossier T14-MC05

Thème : Problèmes d'incidence :  
Parallélisme et orthogonalité.

### 1. Exercice proposé au candidat : Tétraèdre orthocentrique.

On dit qu'un tétraèdre  $ABCD$  est orthocentrique lorsque ses hauteurs sont concourantes.

1° On considère un tétraèdre  $ABCD$  tel que  $(AB)$  soit orthogonale à  $(CD)$  et  $(AC)$  orthogonale à  $(BD)$ .

- Montrer que pour tout point  $M$  de l'espace,  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .  
En déduire que les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont orthogonales.
- Soient  $A'$  et  $B'$  les projetés orthogonaux respectifs de  $A$  et de  $B$  sur les plans  $(BCD)$  et  $(ACD)$ .  
Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BD}$ . En déduire que  $A'$  est l'orthocentre du triangle  $BCD$ . On montre de même que  $B'$  est l'orthocentre du triangle  $ACD$ .
- La droite  $(BA')$  coupe  $(CD)$  en  $K$ . Montrer que  $K$  appartient à la droite  $(AB')$ .  
En déduire que les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  sont sécantes en un point  $H$ .
- Montrer que le tétraèdre  $ABCD$  est orthocentrique.

2° Réciproque : Soit  $ABCD$  un tétraèdre orthocentrique. Montrer que les arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.

Références : TD p 328 du Déclic de TS (Edition 2006) - 78 p 314 du Déclic de TS (Edition 2002)

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1 Donner un exemple de tétraèdre non orthocentrique.  
Q.2 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse aux questions Q.1 et Q.2
- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : "Problèmes d'incidence : parallélisme et orthogonalité"

### 3. Quelques références au programme : Programme de Terminale S

#### II. 2 Géométrie

L'objectif de ce paragraphe est d'entretenir la pratique des objets usuels du plan et de l'espace et de fournir quelques notions nouvelles permettant de parfaire l'approche entreprise dans les classes antérieures sur la géométrie vectorielle ou repérée. Dans le prolongement du repérage polaire introduit en première, les nombres complexes, outre leur intérêt historique, algébrique et interdisciplinaire pour la poursuite des études, fournissent un outil efficace dans les problèmes faisant intervenir les transformations planes. L'extension à l'espace du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace.

Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc. Ces travaux seront répartis tout au long de l'année afin que les élèves acquièrent une certaine familiarité avec le domaine géométrique ; on privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique).

| CONTENUS                                                                                                                                                      | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                                                             | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Produit scalaire dans l'espace</b>                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                           |
| Rappels sur le produit scalaire dans le plan.<br>Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal. | Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan.<br>Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Equation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan.<br>Inéquation définissant un demi-espace. | On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan ; à cette occasion, on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan. |

## SA08-14-25 : Quadrilatère inscrit dans un cercle et perpendicularité (08.1) - 2 pages

Préparation au CAPES – Université d'Orsay

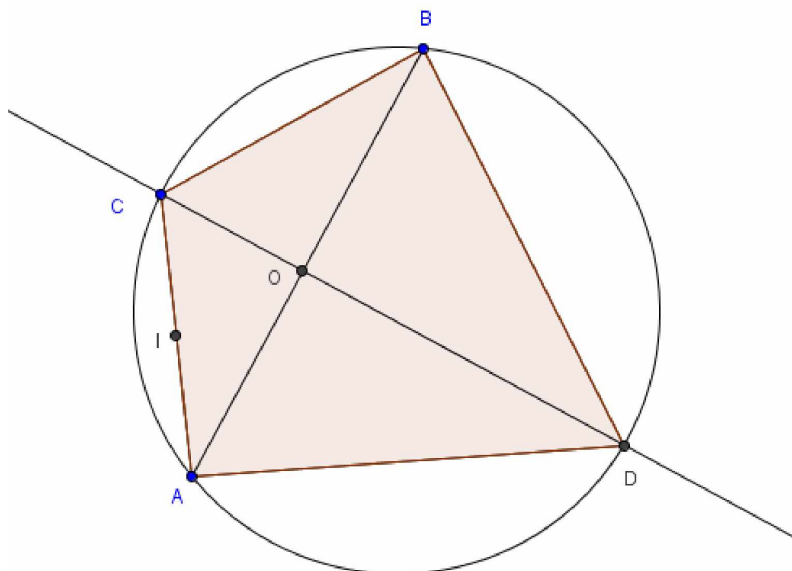
Epreuve sur Dossier

Dossier T14-SA25

Thème Géométrie : parallélisme et orthogonalité dans le plan.

### 1. L'exercice proposé au candidat :

1. Soit  $c$  un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ .  
On désigne par  $P$  un point quelconque du plan et par  $d$  une droite passant par  $P$  qui coupe le cercle en deux points  $A$  et  $B$ .  
a) Soit  $A'$  le point diamétralement opposé à  $A$  sur le cercle  $c$ .  
Démontrer que  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'}$ . En déduire que  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \Omega P^2 - R^2$   
b) Soit  $d'$  une droite passant par  $P$  et coupant le cercle  $c$  en  $C$  et en  $D$ .  
Démontrer que  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$
2. Soit  $ADBC$  un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle  $c$  tel que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont perpendiculaires en un point  $O$ . On désigne par  $I$  le milieu de  $[AC]$ .  
En utilisant le résultat du 1., montrer que les droites  $(OI)$  et  $(BD)$  sont perpendiculaires.



### 2. Travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Indiquer les méthodes et les outils utilisés dans cet exercice.
- Q.2) Proposer sous forme d'exercice une résolution de la question 2. au niveau collège.
- Q.3) Dans l'énoncé, on a supposé que le quadrilatère  $ADBC$  est convexe.  
Que se passe-t-il si on ne fait plus cette hypothèse ?

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.2).
- deux exercices se rapportant au thème : Parallélisme et orthogonalité dans le plan.

# 15 Cocyclicité

## MCD05-15-4 : Cercles inscrit, circonscrit, orthocentre (05.s)

### Thème 15 : Cocyclicité Cercles inscrit, circonscrit, orthocentre

#### 1. EXERCICE PROPOSÉ

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère un triangle  $ABC$ . On note  $O$  le centre du cercle inscrit dans  $ABC$  et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les points d'intersection (distincts de  $A$ ,  $B$  et  $C$ ) des bissectrices intérieures issues respectivement de  $A$ ,  $B$  et  $C$  avec le cercle  $\Gamma$  circonscrit au triangle  $ABC$ .

1. Montrer que  $A$  est le symétrique orthogonal de  $O$  par rapport à la droite  $(B'C')$ .
2. En déduire que  $O$  est l'orthocentre du triangle  $A'B'C'$ . On note  $A''$ ,  $B''$  et  $C''$  les pieds des hauteurs dans  $A'B'C'$ .
3. Montrer que le triangle  $A''B''C''$  est le transformé de  $ABC$  par une homothétie de rapport  $1/2$  dont on précisera le centre.
4. Que représente  $O$  pour le triangle  $A''B''C''$  ?

#### 2. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

#### Après avoir résolu l'exercice :

1. Indiquez l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Analysez avec précision les résultats de convexité utilisés quand la solution est proposée avec des angles géométriques.
3. Quel outil pouvez-vous employer ici pour vous affranchir des cas de figure ?
4. Proposez d'autres énoncés utilisant des propriétés de cocyclicité.

# SA07-15-10 : Puissance d'un point par rapport à un cercle. Orthocentre (07.1, 09.1) - 2 pages

Dossier T15-SA10

Thème : Problème d'incidence  
Cocyclicité

## Exercice proposé au candidat:

1° Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Soit  $\mathbf{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . soit  $P$  un point quelconque du plan.

On mène par  $P$  une droite sécante au cercle  $\mathbf{C}$  qui le coupe en deux points distincts  $A$  et  $B$ .

Montrer que la quantité  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  ne dépend pas de la sécante au cercle  $\mathbf{C}$  issue de  $P$ .

On appelle cette constante " puissance du point  $P$  par rapport au cercle  $\mathbf{C}$  "

2° Application :

Montrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés d'un triangle sont sur le cercle circonscrit à ce triangle.

## Travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 Vous mettrez en place un énoncé adapté à des élèves de lycée.

Q.2 Proposer sous forme d'exercice une résolution du problème de la question 2° au niveau d'une classe de collège ou de seconde

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse aux questions Q.1 et Q.2.

- plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : "**Problème d'incidence : Cocyclicité**"

## Quelques références au programme :

### Programme de 1<sup>ère</sup> S

| CONTENUS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Géométrie vectorielle</b><br>Calcul vectoriel dans l'espace.<br><br>Barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace. Associativité du barycentre.<br><br>Produit scalaire dans le plan ; définition, propriétés.<br><br>Applications du produit scalaire : projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe ; calculs de longueurs. | On étendra à l'espace les opérations sur les vecteurs du plan. On introduira la notion de vecteurs coplanaires.<br>On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites. Propriétés de bilinéarité, de symétrie et expression analytique dans un repère orthonormal.<br>Équation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal, équation d'un cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre.<br>Calculs d'angles, de longueurs et d'aires sur des figures planes en liaison avec le produit scalaire ; on établira et utilisera la formule dite d'Al Kashi, le théorème de la médiane et les formules d'addition et de duplication pour les fonctions cosinus et sinus. | La notion de barycentre, utile en physique et en statistique, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera toute technicité. On n'étendra pas le produit scalaire à l'espace.<br><br>On pourra faire le lien avec le travail d'une force.<br><br>Pour certains exercices, il pourra être utile de disposer des formules reliant les sinus des angles, les côtés et l'aire d'un triangle. |

# 16 Calculs de grandeurs (longueurs, aires et volumes)

## MCD07-16-7 : Différentes expressions du produit scalaire (07.s)

Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique  
CAPES 2007 - Soutien Oral

### Thème 16 Calculs de grandeurs (longueur, aires et volumes)

#### I. EXERCICE PROPOSÉ

Soit  $EFGH$  un rectangle tel que  $EH = a$  et  $EF = 2a$ . On note  $M$  le milieu de  $[FG]$ ,  $K$  le point défini par  $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$  et  $L$  le projeté orthogonal de  $K$  sur  $(EM)$ .

1. Calculer, en fonction de  $a$ , les produits scalaires  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EM}$  et  $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EM}$ .
2. En calculant de plusieurs façons le produit scalaire  $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM}$ , déterminer :
  - a. la longueur  $EL$  en fonction de  $a$ ,
  - b. une mesure de l'angle  $\widehat{KEM}$  arrondie au dixième de degré.

#### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

#### 1. Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Donner une solution de la question 2 qui n'utilise que des outils du collège.

Q3. Donner une version plus générale de l'exercice où la démonstration donnée en Q2 ne fonctionne plus.

Q4. Quels sont les avantages et les inconvénients de la question (1) ?

#### 2. Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- a. sa réponse aux questions Q2 et Q3.
- b. un exercice de calcul de longueur dans l'espace.

*Les programmes sont disponibles dans la salle.*

## CG06-16-6 : Aire d'un carré dans un carré (06.2, 07.2, 09.1)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

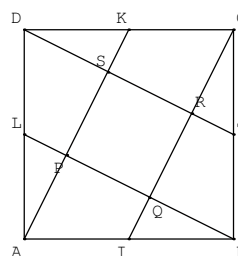
### Dossier 16-1

|                                                                |
|----------------------------------------------------------------|
| <b>Thème :</b> Calcul de grandeurs : longueurs, aires volumes. |
|----------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On donne dans le plan le carré  $ABCD$  de côté  $a$ .  $I, J, K, L$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ . On note  $P, Q, R$  et  $S$  les points d'intersection respectifs de  $(AK)$  et  $(BL)$ ,  $(BL)$  et  $(CI)$ ,  $(CI)$  et  $(DJ)$ ,  $(DJ)$  et  $(AK)$ .

- 1) Calculer  $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BL}$ . En déduire que deux côtés consécutifs du quadrilatère  $PQRS$  sont perpendiculaires.
- 2) Montrer que  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ . En déduire la longueur  $PQ$ .
- 3) Montrer que  $PQRS$  est un carré dont l'aire vaut  $\frac{a^2}{5}$ .



#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.
- Q2 - Proposer une méthode de résolution de cet exercice avec des triangles semblables et des triangles isométriques.
- Q3 - Proposer cet exercice avec des méthodes du niveau de la classe de 4<sup>e</sup> en précisant les connaissances nécessaires.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un autre énoncé d'exercice sur le même thème.

#### 3. Quelques références aux programmes

**Programme de Seconde :**

SUITE ...

|                                                  |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Les configurations du plan.                      | Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. | Les problèmes seront choisis de façon<br>- à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité,<br>- à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive,<br>- à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque). |
| Triangles isométriques, triangles de même forme. | Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.                  | À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non.                                                                        |

### Programme de Première S :

|                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Géométrie vectorielle</b><br>Calcul vectoriel dans l'espace.                                       | On étendra à l'espace les opérations sur les vecteurs du plan. On introduira la notion de vecteurs coplanaires.                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace. Associativité du barycentre.         | On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites.                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Produit scalaire dans le plan ; définition, propriétés.                                               | Propriétés de bilinéarité, de symétrie et expression analytique dans un repère orthonormal.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Applications du produit scalaire : projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe ; calculs de longueurs. | Équation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal, équation d'un cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre.<br>Calculs d'angles, de longueurs et d'aires sur des figures planes en liaison avec le produit scalaire ; on établira et utilisera la formule dite d'Al Kashi, le théorème de la médiane et les formules d'addition et de duplication pour les fonctions cosinus et sinus. |

### Terminale S :

#### Produit scalaire dans l'espace

|                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rappels sur le produit scalaire dans le plan. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal. | Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan. Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Equation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan. Inéquation définissant un demi-espace. | On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan ; à cette occasion, on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Programmes de 5° et 4°** - Voir les paragraphes : Travaux géométriques : parallélogramme, théorème de Pythagore et triangle (théorème des milieux)

## CG06-16-7 : Tétraèdre, section et calcul de volume (06.0, 07.2)

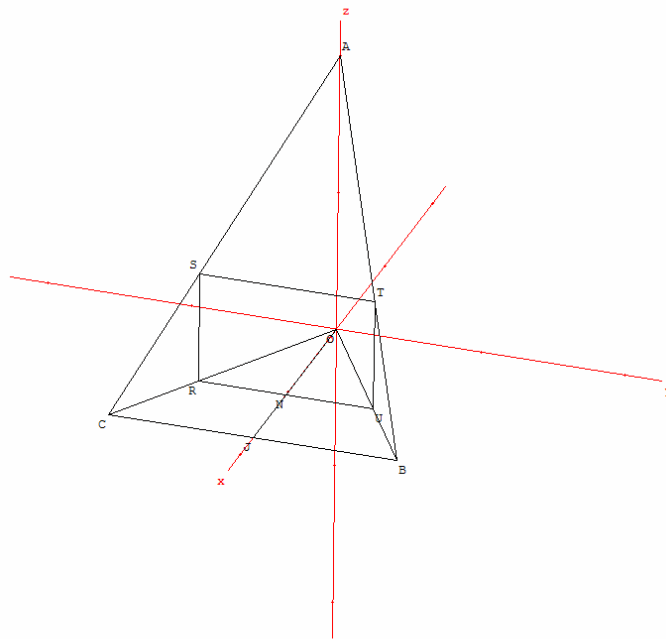
Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier 16-3

|                                                                |
|----------------------------------------------------------------|
| <b>Thème :</b> Calcul de grandeurs (longueurs, aires, volumes) |
|----------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat



L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le tétraèdre  $OABC$  où les points  $A, B, C$  sont définis par leurs coordonnées :  $A(0;0;2)$   $B(\sqrt{3};1;0)$   $C(\sqrt{3};-1;0)$ . La figure est donnée ci-dessus.

Soit  $J$  le milieu de  $[BC]$  et  $N$  un point mobile sur  $[OJ]$ . On appelle  $(P)$  le plan passant par  $N$  et orthogonal à  $(OJ)$ .

#### Partie A : Etude de la section plane de $(P)$ et du tétraèdre

Le plan  $(P)$  coupe les arêtes  $[OC], [AC], [AB], [OB]$  respectivement aux points  $R, S, T, U$ .

- 1) Quelle est la nature du triangle  $OBC$  ?
- 2) Montrer que les droites  $(BC), (RU), (ST)$  sont parallèles.
- 3) Montrer que les droites  $(OA), (RS), (TU)$  sont parallèles.
- 4) Quelle est la nature du quadrilatère  $RSTU$  ?

## MC07-16-14 : Le camion et le lapin (07.1, 09.1) - 2 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

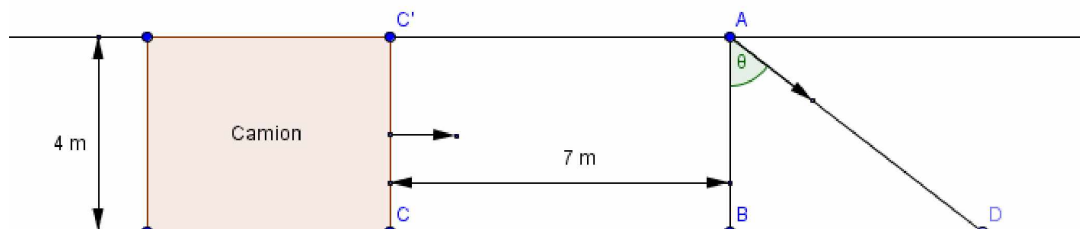
Epreuve sur Dossier

Dossier T16-MC14

Thème : Calcul de grandeur - Emploi d'une fonction dans un cadre géométrique.

### 1. L'exercice proposé au candidat :

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h ! L'avant du camion est représenté par le segment  $[CC']$  sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle  $\theta = \widehat{BAD}$  avec  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de  $\theta$  et les temps  $t_1$  et  $t_2$  mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. On pose  $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$   
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si  $f(\theta) > 0$ .
3. Conclure à l'aide d'une étude de  $f$ .

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Indiquer le niveau auquel s'adresse cet exercice et les difficultés qu'il présente pour les élèves.  
Q.2) Réécrire la question 3. sous forme d'une question non ouverte.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

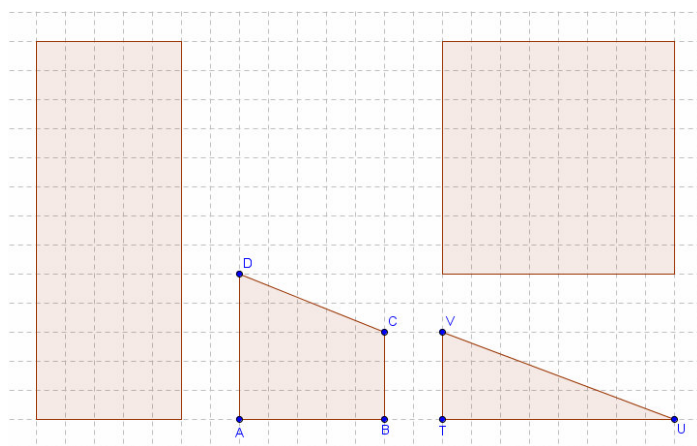
- (a) Sa réponse à la question Q.2)  
(b) Deux énoncés d'exercices se rapportant au thème : Calcul de grandeur - Emploi d'une fonction dans un cadre géométrique.

**Dossier T16-CG20**

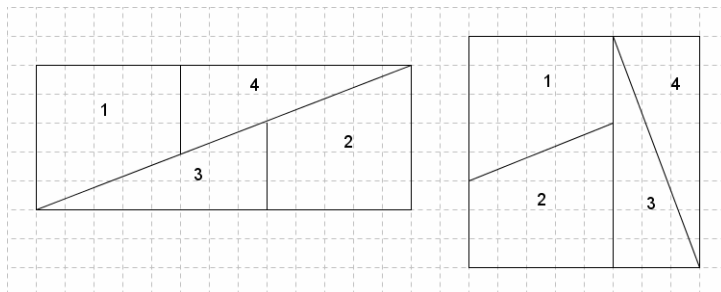
**Thème :** Calcul de grandeurs : longueurs, aires, volumes.

**1. L'exercice proposé au candidat**

On a construit un rectangle de largeur 5 carreaux et de longueur 13 carreaux et un carré de côté 8 carreaux. On dispose de deux exemplaires du trapèze rectangle  $ABCD$  et deux exemplaires du triangle rectangle  $TUV$  reproduits eux aussi sur le quadrillage. On cherche à recouvrir le rectangle et le carré avec ces éléments.



Voici ce qui pourrait être une « solution », mais si on compare les aires on obtient :  $64=65$  !



Expliquez où est l'erreur (On pourra calculer les pentes des segments  $[UV]$  et  $[CD]$ ).

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 – Quel(s) rôle(s) peut jouer un tel exercice dans la formation d'un élève ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2 .
- Un ou deux autres exercices sur le même thème au niveau du collège.

**3. Quelques références aux programmes****Programme du collège : Finalités et objectifs.**

Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.

**Classe de cinquième**

Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures, dessinées suivant les cas à main levée ou à l'aide des instruments de dessin et de mesure, y compris dans un environnement informatique. Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques; ils constituent, en particulier, le support d'activités numériques conjointes (grandeurs et mesures). Les diverses activités de géométrie habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettront progressivement de s'entraîner à des justifications au moyen de courtes séquences déductives mettant en oeuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en 6e, notamment la symétrie axiale. Il importe de faire peu à peu percevoir aux élèves ce qu'est l'activité mathématique, tout en veillant à ne pas leur demander de prouver des propriétés perçues comme évidentes.

**Classe de première S**

[...] Enfin la géométrie élémentaire est une école de pensée: on veillera à allier observations (à l'aide de logiciels de géométrie dynamique notamment) et mise en évidence des démarches et des propriétés des objets étudiés permettant de confirmer ou d'infirmer ces observations; on prendra soin aussi de construire des îlots déductifs consistants et d'aborder divers types de raisonnements formateurs; on incitera à la réflexion sur différents niveaux d'explicitation d'une démonstration.

**Classe de quatrième**

|                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>3. Triangle rectangle et cercle</b><br><br>Cercle circonscrit, théorème de Pythagore et sa réciproque. | Caractériser le triangle rectangle :<br><br>- par son inscription dans un demi-cercle<br>- par la propriété de Pythagore et sa réciproque.<br><br>Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.<br>En donner s'il y a lieu, une valeur approchée en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\quad}$ d'une calculatrice.<br><br>Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit. | On poursuit le travail sur la caractérisation des figures en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés.<br><br>Les relations métriques dans le triangle rectangle autres que celles mentionnées dans les compétences exigibles, ne sont pas au programme. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

# CG07-16-21 : Cercles dans un triangle (08.1,08.2) - 3 pages

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

## Dossier T16-CG21

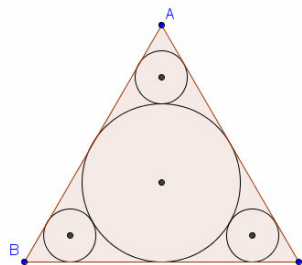
**Thème :** Calcul de grandeurs : angles, longueurs, aires, volumes.

### 1. L'exercice proposé au candidat

#### Partie A

ABC est un triangle équilatéral, son cercle inscrit  $\Gamma$  a pour rayon 3 cm. On cherche le rayon  $r$  des cercles tangents à l'intérieur du triangle à  $\Gamma$  et aux côtés du triangle.

- 1) Montrer que le rayon du cercle inscrit dans un triangle équilatéral est égal au tiers de sa médiane.
- 2) En déduire  $r$ .



#### Partie B

ABC est maintenant isocèle en A. Son cercle inscrit  $\Gamma$  a pour rayon  $R$ .

- 1) On cherche dans quelles conditions le cercle  $\Gamma_1$  tangent à l'intérieur du triangle à  $\Gamma$  et aux droites (AB) et (AC)

aura pour rayon  $R_1 = \frac{R}{2}$ .

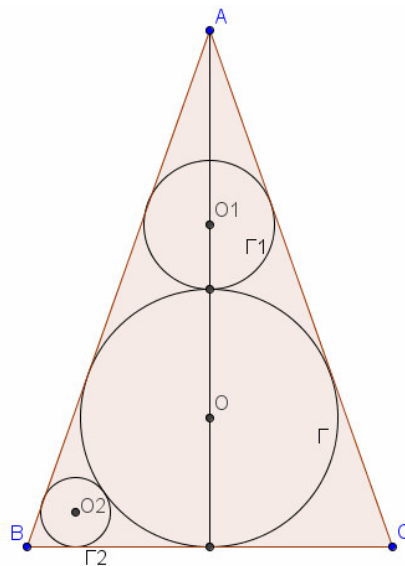
- a) Construire à la règle et au compas le triangle ABC à partir des cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  dans le cas où  $R = 4$  cm et  $R_1 = 2$  cm.

- b) Montrer que  $R_1 = \frac{R}{2}$  équivaut à  $\cos \hat{B} = \frac{1}{3}$ .

- 2) On suppose maintenant que  $R_1 = \frac{R}{2}$ .

- a) Calculer  $\sin \frac{\hat{B}}{2}$  en fonction de  $\cos \hat{B}$ .

- b) En déduire le rayon  $R_2$  du cercle  $\Gamma_2$  tangent à l'intérieur du triangle à  $\Gamma$  et aux droites (BA) et (BC) en fonction de  $R$ .



### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer les méthodes et les savoirs mis en jeu dans cet exercice, ainsi que les niveaux auxquels peuvent être traitées les différentes questions.

Q2 – Proposer une construction détaillée du triangle ABC à la règle et au compas connaissant les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  dans un cas quelconque  $R_1 < R$ .

Q3 – La question B 2)a) nécessite des connaissances de première. Comment un élève de collège peut-il quand même donner une valeur approchée de  $R_2$  ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Deux exercices sur le thème calcul de grandeurs au niveau collège ou seconde.

### 3. Quelques références aux programmes

#### Programme de Quatrième

| Connaissances                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Capacités                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Exemples d'activités, commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Commentaires spécifiques pour le socle                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle.</p> <p>Si cette expression en italiques est précédée d'un astérisque, elle se rapporte à un exigible du socle dans une classe ultérieure.</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <i>Triangle rectangle : cosinus d'un angle</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents.</li> <li>- Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :</li> <li>- du cosinus d'un angle aigu donné ;</li> <li>- de l'angle aigu dont le cosinus est donné.</li> </ul> | <p><i>La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueur.</i></p> <p><i>Les différentes connaissances relatives au triangle rectangle peuvent être synthétisées, en mettant en évidence que :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- la donnée de deux côtés permet de déterminer le troisième côté et les deux angles aigus ;</li> <li>- la donnée d'un côté et d'un angle aigu permet de déterminer les deux autres côtés et l'autre angle aigu.</li> </ul> <p>Les relations métriques dans le triangle rectangle, autres que celles mentionnées dans les compétences sont hors programme.</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <i>Triangle rectangle : cercle circonscrit</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du triangle.</li> <li>- Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.</li> </ul>                                                                              | <p><i>Le cas où le demi-cercle n'est pas apparent (la longueur d'une médiane d'un triangle est la moitié de celle du côté correspondant) est étudié.</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <i>Distance d'un point à une droite</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Savoir que le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.</li> </ul>                                                                                                                                                                        | <p><i>L'inégalité triangulaire et la symétrie axiale, vues auparavant, permettent de démontrer le résultat relatif à la distance d'un point à une droite, lequel peut aussi être relié au théorème de Pythagore.</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <i>Tangente à un cercle</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Construire la tangente à un cercle en l'un de ses points.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>Dans le cadre du socle, il est simplement attendu des élèves qu'ils sachent reconnaître qu'une droite est tangente à un cercle.</p>                                                                                                                                                                 |
| <i>Bissectrice d'un angle</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Connaître et utiliser la définition de la bissectrice.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                | <p>La bissectrice d'un angle est définie comme la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>Les activités qui seront menées sur ce thème dans le cadre du programme peuvent être l'occasion de valider les connaissances et capacités concernant la bissectrice d'un angle déjà travaillées en classe de 6<sup>e</sup> : utilisation de la définition et tracé par la méthode de son choix.</p> |
| [reprise du programme de 6 <sup>e</sup> ]                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utiliser différentes méthodes pour tracer : <ul style="list-style-type: none"> <li>- la médiatrice d'un segment ;</li> <li>- la bissectrice d'un angle.</li> </ul> </li> </ul>                                                                                                                                   | <p>La justification de la construction de la bissectrice à la règle et au compas est reliée à la symétrie axiale. Elle n'est pas exigible dans le cadre du socle.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>Dans le cadre du socle, pour le tracé de la bissectrice d'un angle comme pour celui de la médiatrice d'un segment, la seule exigence est que les élèves sachent utiliser la méthode de leur choix.</p>                                                                                              |

# CG08-16-26 : Calcul de grandeurs avec coordonnées dans l'espace (08.1,08.2)

- 2 pages

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

## Dossier T16-CG26

### Thème : Calcul de grandeurs, distances, aires, volumes

#### 1. L'exercice proposé au candidat

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points A, B et C ont pour coordonnées A(3 ; -2 ; 2), B(6 ; 1 ; 5) et C(6 ; -2 ; -1).

A- 1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

2) Soit P le plan d'équation cartésienne  $x + y + z - 3 = 0$ . Prouver que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

3) Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de P'.

4) Déterminer un vecteur directeur de la droite D intersection des plans P et P'.

B- 1) Soit S le point de coordonnées (0 ; 4 ; -1). Prouver que la droite (AS) est perpendiculaire au plan (ABC).

2) Calculer le volume du tétraèdre ABCS.

3) Prouver que l'angle  $\widehat{BSC}$  a pour mesure  $\frac{\pi}{4}$  radian.

4) Calculer l'aire du triangle BSC et en déduire la distance du point A au plan (BSC).

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 – Détailler deux méthodes différentes permettant de répondre à la question A 4), avec leurs avantages respectifs.

Q3 – Par quelle autre méthode peut-on calculer la distance de A au plan (BSC) ?

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- La réponse à la question Q2.
- Un autre exercice sur le même thème.

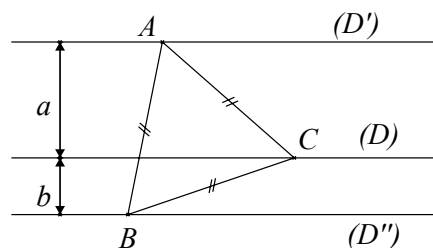
#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de TS

| Contenus                                                                                                                                                                                                   | Modalités de mise en oeuvre                                                                                                                                                                                                                                            | Commentaires                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Produit scalaire dans l'espace</b><br><br>Rappels sur le produit scalaire dans le plan.<br>Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal. | Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan.<br>Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Equation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan.<br>Inéquation définissant un demi-espace. | On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan ; à cette occasion, on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan. |

**Thème : Problèmes de calcul de grandeurs**  
**Calculs de longueurs, d'aires et de volumes**
**1. L'exercice proposé au candidat**

Dans la figure ci-dessous le triangle  $ABC$  est équilatéral et les droites  $(D)$ ,  $(D')$  et  $(D'')$  sont des droites parallèles passant respectivement par les sommets  $C$ ,  $A$  et  $B$ . On note  $a$  la distance de  $(D)$  à  $(D')$  et  $b$  celle de  $(D)$  à  $(D'')$  ; on se propose de calculer, en fonction de  $a$  et  $b$ , l'aire du triangle  $ABC$ .



- 1 Le cercle circonscrit à  $ABC$  recoupe la droite  $(D)$  en un point  $P$ . Montrer que  $AP = \frac{2a}{\sqrt{3}}$  et que  $BP = \frac{2b}{\sqrt{3}}$ .
- 2 En déduire que  $AB^2 = \frac{4(a^2 + b^2 + ab)}{3}$ .
- 3 Calculer l'aire du triangle  $ABC$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1)** Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.  
**Q.2)** Proposer la rédaction d'une solution à la question 1).

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ◇ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de calcul de grandeurs : calculs de longueurs, d'aires et de volumes** ».

# 17 Calculs de grandeurs (angles)

## CG06-17-8 : Calcul d'angle dans une pyramide (06.2, 09.1)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier 17-1

#### Thème : Calculs de grandeurs : angles

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone convexe régulier à  $n$  sommets ( $n \geq 3$ )  $A_1 A_2 \dots A_n$  inscrit dans un cercle de centre  $O$  et dont le sommet  $S$  se projette orthogonalement en  $O$  sur le plan de base.

1) Montrer que les triangles  $SA_1 A_2, SA_2 A_3, \dots, SA_{n-1} A_n$  et  $SA_n A_1$  sont isocèles et de même angle au sommet noté  $\theta$  dans la suite.

2) Montrer que  $A_1$  et  $A_3$  ont le même projeté orthogonal  $H$  sur  $(SA_2)$ .

3) On désigne par  $a$  le côté du polygone  $A_1 A_2 \dots A_n$  et par  $\phi$  l'angle  $\widehat{A_1 H A_3}$ .

a) Montrer que  $HA_1 = HA_3 = a \cdot \cos \frac{\theta}{2}$  et  $A_1 A_3 = 2a \cos \frac{\pi}{n}$ .

b) En déduire que  $\cos \phi = 1 - 2 \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$ .

4) Cet angle  $\phi$  s'appelle l'angle dièdre des deux demi plans  $(SA_1 A_2)$  et  $(SA_2 A_3)$ . En donner une valeur approchée pour  $n = 3$  et  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ , puis  $n = 4$  et  $SA_1 = a$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Faire sur transparent une représentation en perspective cavalière du cas  $n = 5$  et  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

Q3 - Ce problème peut être posé dans le cas de configurations simples, comme le tétraèdre régulier. Proposer dans ce cas un calcul de l'angle dièdre avec des méthodes simples (niveau collège).

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- Un autre exercice sur le même thème.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de Seconde :

|                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Géométrie dans l'espace.<br>Positions relatives<br>de droites et plans : règles<br>d'incidence.<br>Orthogonalité d'une droite<br>et d'un plan. | Manipuler, construire, représenter<br>des solides.<br>Effectuer des calculs simples<br>de longueur, aire ou volume.<br>Connaître les positions relatives<br>de droites et plans de l'espace. | On mettra en œuvre les capacités attendues sur un ou deux<br>exemples: construction d'un patron, représentation en perspective<br>cavalière, dessin avec un logiciel de construction géométrique,<br>calcul de longueurs, d'aires ou de volumes. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 18 Problèmes de constructions (à l'aide de transformations) (3)

### MCD05-18-2 : Rotation envoyant un cercle sur un autre (05.s)

Thème 19 : Etude de configurations.

Thème 26 : Angles

Rotation envoyant un cercle sur un autre

#### 1. EXERCICE PROPOSÉ

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère deux cercles tangents  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  de centres respectifs  $O$  et  $O'$ , de même rayon  $R$ , tangents extérieurement en  $A$ . A tout point  $M$  de  $\Gamma$ , on associe le point  $M'$  de  $\Gamma'$  tel que  $\widehat{(\vec{OM}, \vec{O'M'})} = \frac{\pi}{2}$ .

1. Démontrez qu'il existe une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , dont vous construirez géométriquement le centre  $\Omega$ , qui transforme  $\Gamma$  en  $\Gamma'$ . Quelle est l'image de  $M$  par cette rotation ?

2. Démontrez que le milieu  $I$  de  $[MM']$  est l'image de  $M$  par une similitude directe  $f$  de centre  $\Omega$ . Déterminez les éléments caractéristiques de cette similitude. Déduisez-en le lieu  $\mathcal{L}$  de  $I$  quand  $M$  décrit  $\Gamma$ .

3. Donnez l'image de  $O$  par la similitude  $f$  et une mesure de l'angle  $\widehat{(\vec{OM}, \vec{AI})}$ .

#### 2. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu l'exercice :

1. Indiquez l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

2. Réalisez une figure à la calculatrice et faites apparaître le lieu du point  $I$ .

3. Proposez le plan de deux autres solutions du problème de lieu traité dans cet exercice dont une utilisant le produit scalaire. (Dans le temps de préparation, il n'est pas attendu que vous ayez pu résoudre toutes les questions soulevées par ces solutions mais on souhaite que les plans soient suffisamment détaillés.)

4. Proposez d'autres énoncés illustrant l'emploi des transformations dans le traitement des problèmes de lieux.

## MC07-18-6 : Constructions de quadrilatère sur deux cercles (07.1) - 2 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T18-MC06

Thème : problèmes de construction

### 1. L'exercice proposé au candidat :

On considère deux cercles  $(I)$  et  $(I')$  de centres respectifs  $O$  et  $O'$  et de même rayon  $r$  ( $r$  désigne un réel strictement positif). On note  $d$  la distance entre les points  $O$  et  $O'$ . On suppose que  $d > 2r$ .

Le but de l'exercice est de construire des parallélogrammes particuliers ABCD vérifiant la condition supplémentaire suivante : les sommets A et B appartiennent à  $(I)$  et les sommets C et D appartiennent à  $(I')$ .

1. a) On suppose que ABCD est un rectangle vérifiant la condition donnée.  
Montrer que la réflexion d'axe  $(OO')$  transforme le segment  $[AD]$  en  $[BC]$ .  
b) Discuter selon la position du point A sur le cercle  $(I)$  le nombre de tels rectangles ABCD que l'on peut construire ?
2. a) On suppose que ABCD est un carré vérifiant la condition donnée.  
Montrer que le centre I du carré ABCD est le milieu du segment  $[OO']$ .  
b) Proposer une construction d'un tel carré ABCD (on pourra utiliser une rotation de centre I) en précisant une condition sur  $d$  et  $r$  pour que la construction soit réalisable.
3. Construire si possible un losange ABCD vérifiant la condition donnée.

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.
- Q.2) Le point A étant mobile sur le cercle  $(I)$ , représenter la construction des losanges possibles à l'aide de Cabri-géomètre.
- Q.3) Présenter un énoncé d'exercice permettant à un élève de collège de faire la construction des losanges (quand elle est possible) et de la justifier.

### Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.3).
- deux exercices portant sur le thème *problèmes de construction* dont l'un au moins au niveau TS.

# MC07-18-15 : Symétries et barycentres (07.1,09.1,09.2) - 3 pages

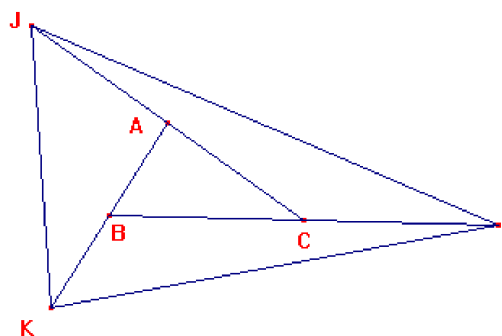
Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T18-MC15

Thème : Problèmes de construction.

1. L'exercice proposé au candidat :



1. Etant donné un triangle ABC, on effectue les constructions suivantes : on symétrise A par rapport à B, B par rapport à C et C par rapport à A. On obtient alors un triangle IJK.
  - a) Justifier les égalités suivantes :
$$A = \text{bar}\{(C,4) ; (J,4)\} = \text{bar}\{(B,2) ; (I,2) ; (J,4)\} = \text{bar}\{(A,1) ; (K,1) ; (I,2) ; (J,4)\}.$$
En déduire que :  $A = \text{bar}\{(K,1) ; (I,2) ; (J,4)\}.$
  - b) Exprimer de la même manière B et C comme barycentres de I, J et K.
  - c) On note P le barycentre de (J,1) et (K,2), Q celui de (K,1) et (I,2) et enfin R celui de (I,1) et (J,2). Montrer que P, Q et R sont respectivement les points d'intersection des droites (BC) et (KJ), (AC) et (IK), (AB) et (IJ).
2. Construction : on donne le triangle IJK. Retrouver les points A, B et C.

2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Indiquer la démarche générale de résolution de ce problème.
- Q.2) Pourrait-on aborder le problème posé dans cet exercice au niveau collège ?
- Q.3) Proposer un énoncé permettant à un élève de Terminale S de faire la construction de la question 2 à l'aide d'une composition de trois homothéties de centre I, J et K.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- (a) Sa réponse à la question Q.3)
- (b) L'énoncé d'un exercice se rapportant au thème : **Construction à l'aide des transformations**

# SA06-18-11 : Construction triangle à partir des médianes (06.1) - 1 page

Préparation au CAPES 2006 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T18-SA11

Thème Géométrie : Problèmes de construction.

## 1. L'exercice proposé au candidat

$D$ ,  $D'$  et  $D''$  sont trois droites concourantes en un point  $G$ .

- 1) Construire un triangle  $A_1B_1C_1$  dont les médianes sont les trois droites  $D$ ,  $D'$  et  $D''$ .
- 2) Démontrer que si  $A_2B_2C_2$  est un triangle dont les médianes sont les droites  $D$ ,  $D'$  et  $D''$  alors ce triangle est l'image du triangle  $A_1B_1C_1$  par une homothétie.
- 3) Construire un triangle  $ABC$  dont les médianes sont les trois droites  $D$ ,  $D'$  et  $D''$  et qui est inscrit dans un cercle de rayon donné.

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.  
Q.2) Combien le problème admet-il de solutions ?  
Q.3) A quels niveaux peut-on donner le problème de construction de la première question ?  
Proposer un énoncé différencié de cette question pour chaque niveau.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.3)
- deux exercices permettant de construire un triangle satisfaisant à des conditions métriques ou géométriques dans le thème : Problèmes de construction.

## 3. Quelques références au programme :

### Programme de 5<sup>ème</sup> :

|                                    |                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cercle circonscrit à un triangle   | - Construire le cercle circonscrit à un triangle.                                   | La caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance a déjà été rencontrée en classe de sixième. Elle permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle circonscrit à un triangle.                                                                                                    |
| Médianes et hauteurs d'un triangle | - Connaître et utiliser la définition d'une médiane et d'une hauteur d'un triangle. | Ces notions sont à relier au travail sur l'aire d'un triangle (cf. § 4.3). Des activités de construction ou l'usage d'un logiciel de géométrie permettent de mettre en évidence les propriétés de concours des médianes et des hauteurs d'un triangle. La démonstration de ces propriétés n'est pas envisageable en classe de cinquième, mais possible en classe de quatrième. |

### Programme de Première S :

#### Transformations

Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).

Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.

# SA06-18-12 : Construction d'un triangle (06.1) - 1 page

## Dossier T18-SA12

### Thème : Problèmes de constructions utilisant des configurations connues

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux points  $B$  et  $C$  tels que  $BC = 6$  unités.

1° Construire les triangles  $ABC$  tels que  $AI = 4$  unités où  $I$  est le milieu de  $[BC]$  et  $BAC = 45^\circ$  (On pourra introduire le cercle circonscrit au triangle)

2° On reprend la question précédente en prenant  $AI = a$  ( $a$  étant un réel strictement positif). Déterminer en fonction de  $a$  le nombre de solutions au problème

#### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

Q.1 Expliciter la démarche générale d'un tel problème

Q.2 Présenter la construction sur un transparent ou à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

Q.3 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse à la question Q.1

- plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : Problèmes de constructions utilisant des configurations connues.

#### 3. Quelques références au programme :

##### Accompagnement des programmes du cycle central 5<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup>

##### Les problèmes de construction

Le tracé est une chose, sa description raisonnée en est une autre. Les élèves sont amenés à mettre en œuvre des définitions ou des propriétés caractéristiques de figures géométriques et des propriétés d'une transformation qui agit sur ces figures. L'intérêt d'une construction porte plus sur la procédure utilisée que sur l'objet obtenu. La justification qui l'accompagne est une occasion de raisonnement. L'existence d'une solution dans l'un ou l'autre

problème de construction peut se poser sans que, pour autant, elle soit soulevée de façon systématique et formalisée. En outre, l'examen d'une figure géométrique peut conduire à un inventaire (non nécessairement exhaustif) de ses propriétés, puis à un choix de certaines d'entre elles en vue d'une construction. Ces propriétés retenues jouent alors le rôle d'hypothèses, les autres de conclusions. Une telle démarche contribue à la compréhension du statut d'un énoncé dans une démonstration.

##### Programme de 3<sup>e</sup>

| CONTENUS       | COMPÉTENCES EXIGIBLES                                                      | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Angles inscrit | Comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc. | On généralise le résultat relatif à l'angle droit, établi en classe de quatrième. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc, mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné, autre qu'un angle droit, est hors programme. |

**Thème : Problèmes de constructions**

Constructions à l'aide de transformations

**1. L'exercice proposé au candidat**

On considère trois cercles concentriques  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  de centre  $O$  et de rayons respectifs 6 unités, 4 unités et 3 unités et un point  $A$  du cercle  $\Gamma_1$ .

Le but de l'exercice est de construire un triangle  $ABC$  équilatéral tel que le point  $B$  appartienne au cercle  $\Gamma_2$  et que le point  $C$  appartienne au cercle  $\Gamma_3$ .

- 1) Déterminer et construire toutes les solutions ( *on pourra utiliser des rotations de centre  $A$* ).
- 2) Reprendre la question précédente en conservant les rayons des cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  et en considérant un cercle  $\Gamma_2$  de rayon  $r$  ( $r$  réel strictement positif quelconque). Discuter alors, en fonction de  $r$ , l'existence et le nombre des solutions.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1) Expliciter la démarche générale de résolution d'un tel problème.
- Q.2) Présenter la construction des points  $B$  et  $C$  sur un transparent ou à l'aide du modèle de géométrie de la calculatrice.
- Q.3) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q.4) Proposer un ou plusieurs exercices sur le même thème en variant le type de problème de construction et les transformations utilisées.

# JURY06-18-1507 : Construction d'un triangle rectangle isocèle avec des similitudes (07.2) - 2 pages

CAPES Externe de Mathématiques 2006

Épreuve sur dossier

## Thème : Problèmes de constructions

### 1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux droites parallèles  $d$  et  $\delta$  et un point  $A$  n'appartenant ni à  $d$  ni à  $\delta$ . Le but de l'exercice est de construire un triangle  $ABC$  rectangle isocèle en  $B$  tel que le point  $B$  appartienne à la droite  $d$  et que le point  $C$  appartienne à la droite  $\delta$ .

- 1) Si une telle construction est réalisable, déterminer les similitudes directes de centre  $A$  qui transforment  $B$  en  $C$ .
- 2) Résoudre le problème posé. Combien y a-t-il de solutions ?
- 3) Reprendre l'exercice en supposant les droites  $d$  et  $\delta$  sécantes.

### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Expliciter la démarche générale de résolution de ce problème.
- Q.2) Quelles indications, ou questions supplémentaires ajouteriez-vous à l'énoncé pour le proposer à une classe ?
- Q.3) Présenter à l'aide du module de géométrie dynamique de la calculatrice la figure comportant les solutions du problème lorsque les droites  $d$  et  $\delta$  sont parallèles.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

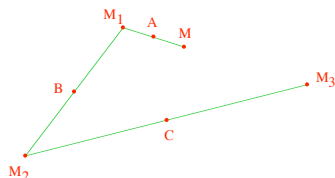
- sa réponse à la question Q.2) ;
- l'énoncé d'un exercice se rapportant au thème : « problèmes de construction ».

## LB09-18-1 : circuits fermés et symétries centrales (09.s)

Thème : Problèmes de construction à l'aide de transformations.

### I. EXERCICE PROPOSÉ

1. Soient  $A, B, C$  trois points non alignés du plan. Pour un point  $M$  quelconque du plan, on note  $M_1$  son symétrique par rapport à  $A$ , puis  $M_2$  le symétrique de  $M_1$  par rapport à  $B$  et, enfin,  $M_3$  le symétrique de  $M_2$  par rapport à  $C$ .



On recherche les points  $M$  du plan pour lesquels le circuit est fermé (i.e.  $M_3 = M$ ).

- Soient  $s_A$  la symétrie centrale de centre  $A$ ,  $s_B$  la symétrie centrale de centre  $B$  et  $s_C$  la symétrie centrale de centre  $C$ . Quelle est la composée  $s_C \circ s_B \circ s_A$  ?
- En déduire qu'il existe un seul circuit fermé. En donner une construction.

2. On donne quatre points  $A, B, C, D$  non alignés dans le plan. Pour tout point  $M$ , on définit  $M_1, M_2, M_3$  comme dans la question 1 et  $M_4$  comme le symétrique de  $M_3$  par rapport à  $D$ . On recherche les points  $M$  du plan pour lesquels le circuit est fermé (i.e.  $M_4 = M$ ).

- On suppose tout d'abord qu'il existe un point  $M$  pour lequel le circuit est fermé. Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.
- On suppose maintenant que  $ABCD$  est un parallélogramme. Montrer qu'on obtient un circuit fermé à partir de n'importe quel point  $M$ .
- Conclure.

### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q1. Dégager les méthodes et les différentes propriétés mises en jeu pour résoudre l'exercice.
- Q2. Proposer un énoncé permettant à un élève de collège d'aborder les deux problèmes de cet exercice.
- Q3. Comment pourrait-on poursuivre l'exercice afin de mettre en évidence l'intérêt des transformations ?

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse aux questions Q2 et Q3.
- plusieurs exercices sur le thème "Problèmes de construction à l'aide de transformations", en particulier celles introduites au lycée.

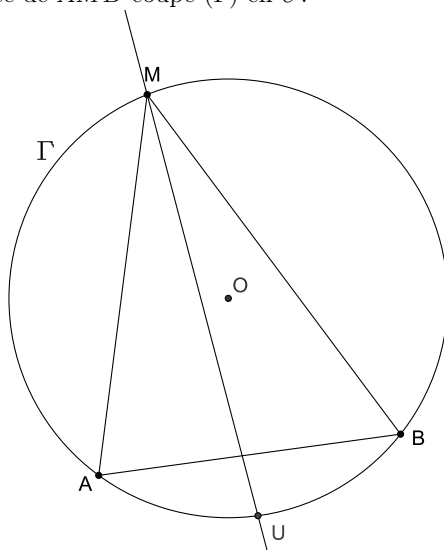
Quelques références au programme : programme de 1<sup>ère</sup> S.

**Thème : Problèmes de constructions**

Constructions utilisant des configurations connues

**1. L'exercice proposé au candidat**

Soit  $(\Gamma)$  un cercle de centre  $O$  et  $[AB]$  une corde de  $(\Gamma)$ . Soit  $M$  un point de  $(\Gamma)$ , distinct de  $A$  et de  $B$ . La bissectrice de  $\widehat{AMB}$  coupe  $(\Gamma)$  en  $U$ .



- 1) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure. Quelle conjecture peut-on faire sur le point  $U$  et sur le triangle  $AUB$  lorsque  $M$  décrit un arc de cercle d'extrémités  $A$  et  $B$  ?
- 2) Démontrer cette conjecture et préciser la position de  $U$ .
- 3) Soit  $(\Gamma)$  un cercle de centre  $O$ ,  $[AB]$  une corde de  $(\Gamma)$  et  $N$  un point de  $]AB[$ . Construire un triangle  $ABC$  tel que  $C \in (\Gamma)$  et tel que la bissectrice de  $\widehat{ACB}$  passe par  $N$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1)* Présenter la figure réalisée sur la calculatrice et l'animation permettant de mettre en évidence la conjecture.
- Q.2)* Dégager les propriétés mises en jeu dans la résolution de l'exercice et indiquer à quel niveau on peut le proposer.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- Sa réponse à la question *Q.1*).
- plusieurs énoncés d'exercices, variés, de constructions de triangles vérifiant des conditions métriques ou géométriques.

## CG09-18-28 : Cercles tangents à deux droites (09.1,09.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier T18-CG28

#### Thème : Problèmes de construction

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On donne deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sécantes en  $O$  et un point  $A$  n'appartenant à aucune de ces droites. Le but de l'exercice est de construire les cercles passant par le point  $A$  et tangents aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .  
1° Construire un cercle  $\Gamma$  tangent aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  situé dans le secteur angulaire contenant le point  $A$  limité par les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

2° On suppose dans cette question que  $\mathcal{C}$  est un cercle passant par  $A$  et tangent aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , La droite  $(OA)$  coupe le cercle  $\Gamma$  en  $P$  et en  $Q$ .  
Montrer que  $\Gamma$  est l'image de  $\mathcal{C}$  par une homothétie de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $P$  ou en  $Q$ .

3° Construire les cercles passant par le point  $A$  et tangents aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 – Justifier que la droite  $(OA)$  coupe le cercle  $\Gamma$  en  $P$  et en  $Q$ .

Q3 – Si les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles, quels sont les changements ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- Deux autres exercices sur le même thème et dont la résolution fait appel aux transformations.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de première scientifique

| Contenus                                                                                                                                                                                                                                                                      | Modalités de mise en œuvre                                                                                                                                                                                                                | Commentaires                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Transformations</b> Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle). | Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie. | Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier. |

# 19 Problèmes de constructions (sections planes et patrons)

## MC07-19-7 : Hexagone régulier dans un cube (07.1) - 2 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

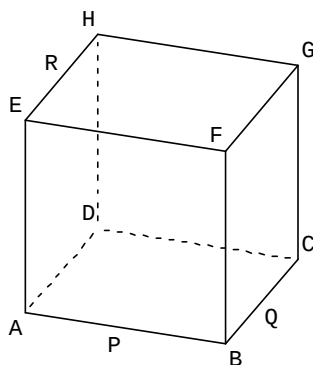
Epreuve sur Dossier

Dossier T19-MC07

Thème : Problèmes de construction - Sections planes de solides

### 1. L'exercice proposé au candidat

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



P, Q et R sont les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[EH]$

Le but de l'exercice est de déterminer l'intersection du plan  $(PQR)$  avec les faces du cube.

1. Construire le point I d'intersection de la droite  $(PQ)$  avec le plan  $(ADHE)$
2. Construire le point J d'intersection de la droite  $(PQ)$  avec le plan  $(DCGH)$
3. Construire le point K d'intersection de la droite  $(IR)$  avec le plan  $(DCGH)$
4. En déduire une construction du polygone d'intersection du plan  $(PQR)$  avec les faces du cube.
5. Démontrer que ce polygone est un hexagone régulier.

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Indiquer les méthodes et les outils utilisés dans cet exercice.
- Q.2) Proposer une autre rédaction des questions intermédiaires 2 et 3 utilisant les propriétés du parallélisme dans l'espace au niveau Seconde.
- Q.3) Avec quels autres outils de Terminale S pourrait-on faire cet exercice ? Donner un exemple de question.
- Q.4) Proposer une rédaction de cet exercice en partant des points P, Q et R appartenant respectivement aux arêtes  $]AB[$ ,  $]CG[$  et  $]EH[$ .

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse aux questions Q.2), Q.3), et Q.4)
- deux exercices se rapportant au thème : Problèmes de construction - Sections planes de solides

# MC08-19-18 : Différentes sections d'un tétraèdre (08.1, 09.1) - 2 pages

Préparation au CAPES – Université d'Orsay

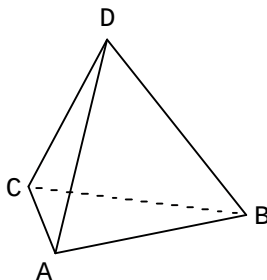
Epreuve sur Dossier

Dossier T19-MC18

Thème : Problèmes de construction - Sections planes de solides

## 1. L'exercice proposé au candidat

Le but de l'exercice est d'étudier la section d'un tétraèdre par un plan dans quelques cas de figure.  
On considère le cube ABCD suivant :



1. On suppose que M est un point de  $[AB]$  distinct de A et B.  
On suppose que N est un point de  $[AC]$  distinct de A et C.  
On suppose que P est un point intérieur au triangle BCD.  
Construire la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP) dans le deux cas suivants :
  - lorsque les droites (MN) et (BC) sont sécantes.
  - lorsque les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
2. On suppose que M est un point de  $[AB]$  distinct de A et B.  
On suppose que N est un point intérieur au triangle ACD.  
On suppose que P est un point intérieur au triangle BCD.
  - a) On suppose que la droite (NP) et le plan (ABC) sont sécants. Construire la droite d'intersection (d) du plan (DNP) avec le plan (ABC) puis construire la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP).
  - b) Construire la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP) lorsque la droite (NP) et le plan (ABC) sont parallèles.

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Indiquer les méthodes et les outils utilisés dans cet exercice.
- Q.2) Proposer la rédaction d'un exercice au niveau Seconde permettant de construire la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP) quand M, N et P sont des points intérieurs respectivement aux faces ABD, ACD et BCD.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.2).
- deux exercices se rapportant au thème : Problèmes de construction - Sections planes de solides



## 20 Problèmes sur les configurations (étude de configurations à l'aide de différents outils) (3)

### MCD06-20-6 : Symétrie de l'orthocentre (06.s)

MCD06-22-6

Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique  
CAPES 2006 - Soutien Oral

### Thème 20 : Problèmes sur les configurations (étude de configurations à l'aide de différents outils)

#### I. EXERCICE PROPOSÉ

On considère trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  fixes et alignés dans cet ordre et la perpendiculaire  $\Delta$  en  $C$  à  $(AB)$ . Une droite variable  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  coupe  $\Delta$  en  $M$ . La perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $B$  coupe  $\Delta$  en  $N$  et  $\mathcal{D}$  en  $U$ .

1. Montrer que  $(MB)$  est perpendiculaire à  $(AN)$ . On note  $V$  leur point d'intersection.
2. Soit  $\Gamma$  le cercle circonscrit au triangle  $AMN$ .
  - a. Faire la figure à l'aide Cabrigéomètre et repérer un point  $B'$  de  $\Gamma$ , autre que  $A$ , fixe quand  $\mathcal{D}$  varie. Que peut-on conjecturer sur la position de  $B'$  par rapport à  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $\Delta$  ?
  - b. Montrer cette conjecture.
  - c. Déterminer le lieu du centre  $\Omega$  de  $\Gamma$ .
3. Soit  $\Gamma'$  le cercle circonscrit au triangle  $BMN$ .
  - a. Montrer que  $\Gamma'$  a même rayon que  $\Gamma$ .
  - b. Déterminer le lieu du centre  $\Omega'$  de  $\Gamma'$ .

#### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

#### 1. Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- a. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
- b. La question 2.?? ci-dessus est sans doute très difficile pour des élèves de collège ou de lycée. Proposer des indications, voire des questions intermédiaires permettant de l'aborder plus facilement.
- c. Quelle hypothèse de l'énoncé permet d'éviter que, dans la question 2.b, plusieurs cas de figure ne soient à considérer ? Que se passerait-il si l'on supprimait cette hypothèse ?

#### 2. Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- a. sa réponse aux questions b et c.
- b. un ou plusieurs énoncés d'exercices d'étude de configurations.

*Le programme de première est disponible dans la salle.*

## CG05-20-9 : Triangles équilatéraux et carré (07.2)

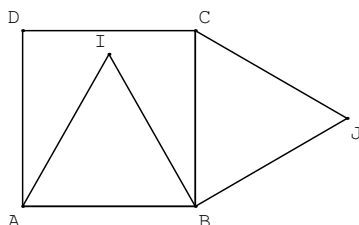
Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier 20-3

|                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Thème :</b> Problèmes sur les configurations - Etudes de configurations à l'aide de différents outils |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat



$ABCD$  est un carré direct.

$I$  et  $J$  sont des points tels que  $ABI$  et  $CBJ$  soient des triangles équilatéraux directs.

Le but de l'exercice est de démontrer que les points  $D$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés avec différentes méthodes.

1. 1<sup>ère</sup> méthode : Utiliser les angles géométriques
2. 2<sup>ème</sup> méthode : Utiliser une rotation.
3. 3<sup>ème</sup> méthode : Utiliser la formule d'Al-Kashi
4. 4<sup>ème</sup> méthode : Utiliser un repère

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Si on s'était placé dans le plan complexe, quelles autres méthodes aurait-on pu utiliser ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un autre exercice d'alignement ou de concours pouvant être résolu par trois méthodes différentes.

#### 3. Quelques références aux programmes

**Programme de ... il y en a trop ...**

Voir le paragraphe :

**Dossier 20-4****Thème : Problèmes sur les configurations – Etude de configuration à l'aide de différents outils****1. L'exercice proposé au candidat**

Soit un triangle  $ABC$  et  $M_0$  un point de  $(AB)$ .

On appelle  $M_1$  le point d'intersection de  $(BC)$  avec la parallèle à  $(AC)$  passant par  $M_0$ .

On appelle  $M_2$  le point d'intersection de  $(CA)$  avec la parallèle à  $(AB)$  passant par  $M_1$ .

On appelle  $M_3$  le point d'intersection de  $(AB)$  avec la parallèle à  $(BC)$  passant par  $M_2$ .

On appelle  $M_4$  le point d'intersection de  $(BC)$  avec la parallèle à  $(AC)$  passant par  $M_3$ .

On appelle  $M_5$  le point d'intersection de  $(CA)$  avec la parallèle à  $(AB)$  passant par  $M_4$ .

On appelle  $M_6$  le point d'intersection de  $(BC)$  avec la parallèle à  $(AC)$  passant par  $M_5$ .

Montrer que  $M_0 = M_6$  de plusieurs façons :

- 1) En utilisant le théorème de Thalès.
- 2) En utilisant des parallélogrammes.
- 3) En utilisant des triangles isométriques.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Donner une méthode de résolution utilisant les barycentres et leur conservation par projection.

Q3 - Comment faut-il placer  $M_0$  pour que les trois droites  $(M_0M_5)$ ,  $(M_1M_2)$  et  $(M_3M_4)$  soient concourantes ? Comment faut-il placer  $M_0$  pour que  $M_3 = M_0$  ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un exercice dont la résolution met en œuvre de triangles isométriques.

**3. Quelques références aux programmes**

**Programme de 5°** - Voir le paragraphe : Travaux géométriques : parallélogramme.

**Programme de 3°** - Voir le paragraphe : Travaux géométriques : propriété de Thalès.

**Programme de 2°** - Voir le paragraphe : Géométrie : triangles isométriques, triangles de même forme.

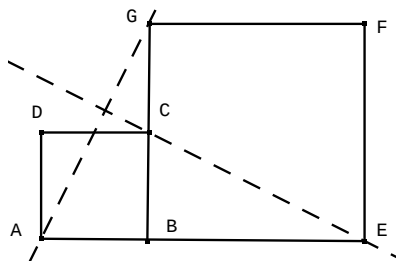
**Programme de 1°S** - Voir le paragraphe : Géométrie vectorielle : barycentre.

**Thème : Problèmes sur les configurations**

Étude de configurations à l'aide de différents outils

**1. L'exercice proposé au candidat**

Dans la figure ci-dessous, le point  $B$  est un point du segment  $[AE]$  distinct de  $A$  et  $E$ .  $ABCD$  et  $BEFG$  sont des carrés. On se propose de démontrer, par différentes méthodes, que les droites  $(AG)$  et  $(EC)$  sont orthogonales.



## 1) Outil "configurations"

On note  $U$  le point d'intersection de  $(AC)$  et  $(EG)$ . Justifier que l'angle  $\widehat{AUE}$  est droit et conclure (on pourra considérer le triangle  $AGE$ ).

## 2) Outil "produit scalaire"

Calculer  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}$  et conclure.

## 3) Outil "analytique"

Après avoir muni le plan d'un repère orthonormal, montrer que les droites  $(AG)$  et  $(EC)$  sont orthogonales.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1* Mettre en évidence, à l'aide du logiciel de géométrie dynamique de la calculatrice, la propriété indiquée.
- Q.2* Indiquer pour chacun des outils, le niveau où pourrait être donné l'exercice.
- Q.3* Proposer une autre méthode de résolution.
- Q.4* Proposer un ou plusieurs exercices qui permettent de mettre en jeu plusieurs méthodes pour résoudre un même problème de géométrie plane.

**Thème : Problèmes sur les configurations**

**1. L'exercice proposé au candidat**

L'exercice suivant est extrait d'un manuel de collège :

$ABCD$  est un parallélogramme de centre  $O$  tel que :

$AD = 6$  cm,  $DC = 12$  cm et  $\widehat{ADC} = 50^\circ$ ,  $F$  est le milieu de  $[DC]$ .

- 1) Calculer les angles du triangle  $ADF$  et montrer que  $(AF)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{DAB}$ .
- 2) La parallèle à  $(AF)$  passant par  $C$  coupe la droite  $(AB)$  en  $E$ . Montrer que  $AECF$  est un parallélogramme. En déduire que  $E$  est le milieu de  $[AB]$ .
- 3) Montrer que les droites  $(EO)$  et  $(BC)$  sont parallèles et calculer  $EO$ .
- 4) Montrer que  $O$  est le milieu de  $[EF]$ .
- 5) La droite  $(BD)$  coupe la droite  $(EC)$  en  $I$  et la droite  $(AF)$  en  $J$ .  
Montrer que  $DJ = JI = IB$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1) Préciser les différents outils mis en jeu dans votre résolution de cet exercice ainsi que le niveau auquel cette résolution pourrait être abordée.*
- Q.2) Faire une analyse critique de l'énoncé et de l'enchaînement entre les différentes questions. On s'attachera notamment à évaluer le rôle des différentes hypothèses dans les résultats établis.*
- Q.3) On désire partir de l'énoncé précédent pour fabriquer, pour une classe de quatrième, un exercice établissant uniquement le résultat de la question 5). Rédiger un énoncé permettant d'établir ce résultat ; on veillera à ne mettre que les hypothèses indispensables.*
- Q.4) Proposer un (ou deux) autre(s) exercice(s) sur le même thème.*

## DJ05-20-4 : configurations usuelles (05.2)

Préparation au CAPES, Orsay, 2005

### Thème : Configurations usuelles

#### Énoncé

I. ABC est un triangle acutangle ; on cherche des triangles équilatéraux PQR tels que  $A \in ]QR[$ ,  $B \in ]RP[$ ,  $C \in ]PQ[$

1) On part d'un triangle équilatéral PQR avec A, B, C comme ci-dessus. Prouver que P, Q, R sont des points respectifs de trois cercles ne dépendant que de A, B, C. Construire ces cercles. On notera  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_3)$  les arcs de ces cercles qui sont extérieurs à ABC.

2) On considère ABC ainsi que  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_3)$ .

Soit R un point de  $(\Gamma_3)$  tel que la droite (AR) coupe  $(\Gamma_2)$  en un point noté Q. Etudier si les droites (RB) et (QC) sont sécantes en un point P. Dans l'affirmative, où P est-il situé ? Énoncer un procédé d'obtention des triangles PQR.

II. ABCD est un rectangle. On cherche des rectangles PQRS tels que  $A \in ]SP[$ ,  $B \in ]PQ[$ ,  $C \in ]QR[$ ,  $D \in ]RS[$

1) En reprenant la démarche du I.1), définir et construire les lignes  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_3)$ ,  $(\Gamma_4)$  sur lesquelles se trouvent nécessairement P, Q, R, S.

2) On considère ABCD ainsi que  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_3)$ ,  $(\Gamma_4)$ .

Soit S un point de  $(\Gamma_4)$  tel que (AS) coupe  $(\Gamma_3)$  en un point noté R. Soit Q le point commun à (RC) et  $(\Gamma_2)$ . Etudier si (AS) et (BQ) se coupent un point P. Dans l'affirmative, où P est-il situé ? Énoncer un procédé d'obtention des rectangles PQRS.

3) Justifier que les triangles DRC et ADS sont semblables et calculer  $SR - SP$  en fonction de AS,

$SD$  et  $k = \frac{AB}{BC}$  ; combien y a-t-il de rectangles PQRS qui sont des carrés lorsque ABCD n'est pas un carré ? Que se passe-t-il quand ABCD est un carré ?

#### Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

#### Après avoir résolu l'exercice

1) Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode, et les différents outils utilisés, ainsi que le ou les niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

2) Peut-on préciser les parties de  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_3)$  qui donneront des triangles PQR, dans le I. et dans le II. ?

3) Dans le II., quelles précisions donneriez-vous à un élève pour construire la figure d'analyse ?

4) Quelle stratégie générale doit-on adopter dans ce type de constructions ?

5) Proposer un exercice sur la construction d'un triangle ou d'un polygone vérifiant certaines propriétés particulières.

## DJ05-20-5 : polygones réguliers (05.2)

Préparation au CAPES, Orsay, 2005

**Thème : Configurations usuelles**

**Polygones réguliers**

**Énoncé**

$P_n$  est un polygone régulier convexe direct inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, de sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ;  $a$  est la distance de  $O$  à chaque côté et  $l$  la longueur  $A_1A_2$ .

$P$  est un point intérieur à  $P_n$ ;  $H_1, H_2, \dots, H_n$  sont les projections orthogonales de  $P$  sur les droites  $(A_1A_2), (A_2A_3), \dots, (A_nA_1)$ .

I. Etude de  $f(P) = \sum_{k=1}^n PH_k$

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  étant un repère orthonormé direct, on note  $\vec{n}_k$  un vecteur unitaire normal à  $(A_kA_{k+1})$  et  $\alpha$  la mesure principale de l'angle  $(\vec{i}, \vec{A_1A_2})$

a) Prouver que l'on peut choisir  $\vec{n}_k$  pour que :  $M \in (A_kA_{k+1}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_k = a$

b) En déduire que :  $PH_k = a - \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}_k$

c) On note  $z_k$  l'affixe de  $\vec{n}_k$ ; déterminer  $\sum_{k=1}^n z_k$ ; en déduire la valeur de  $f(P)$ ; énoncer le résultat obtenu.

II. On cherche à déterminer l'ensemble  $C_n$  des points  $P$  intérieurs à  $P_n$  tels que chaque  $H_k$  appartienne au segment  $[A_kA_{k+1}]$ ;  $\overline{C_n}$  est la frontière de  $C_n$ .

1) Quel est  $\overline{C_n}$  lorsque  $n = 3$ ; lorsque  $n = 4$ ?

2) a) Dessiner  $\overline{C_6}$

b) On note A, B, C, D, E, F les sommets de  $P_6$ ; P, Q, R, S, T, U sont les points d'intersection respectifs de (AE) et (DF), (AE) et (BF), (BF) et (AC), (AC) et (BD), (BD) et (CE), (CE) et (DF). Prouver que P, Q, R, S, T, U sont les sommets d'un hexagone régulier.

c) Prouver que  $C_6$  est directement semblable à  $P_6$ ; on précisera les éléments de la similitude directe.

**Travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Après avoir résolu l'exercice**

- 1) Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.
- 2) Donner une définition d'un polygone régulier – au niveau second cycle ? – au niveau premier cycle ?
- 3) Un polygone convexe inscrit dont tous les angles sont égaux est-il régulier ?
- 4) Proposer une démonstration au niveau premier cycle de la propriété établie en I.
- 5) Pourquoi la démarche du I ne s'applique-t-elle plus dans le cas où  $P$  est extérieur à  $P_n$  ?
- 6) Quelle définition d'un polygone régulier est la plus adaptée à la question II. 2)b) ? Quelles propriétés de  $P_n$  sont mises en œuvre dans cette question ?
- 7) Proposer un exercice sur le même thème.

# DJ09-20-12 : bissectrices intérieures d'un parallélogramme (09.O)

Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique  
CAPES 2009 - Oral blanc

## Thème : Etude d'une configuration.

### I. EXERCICE PROPOSÉ

Dans le plan euclidien, on considère un parallélogramme  $ABCD$  de centre  $O$  tel que  $AB > BC$ . On désigne par  $(\mathcal{C}_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2)$ ,  $(\mathcal{C}_3)$  et  $(\mathcal{C}_4)$  les cercles de diamètre  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$  respectivement.

1. Démontrer les quatre propriétés suivantes, dans l'ordre le plus commode :

- (a) il existe un cercle  $(\gamma)$  tangent aux quatre cercles  $(\mathcal{C}_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , en les points respectifs  $S$ ,  $R$ ,  $Q$ ,  $P$  ;
- (b) le quadrilatère  $PQRS$  est un rectangle ;
- (c) les points suivants sont trois à trois alignés :  $A, P, S$  ;  $B, R, S$  ;  $C, R, Q$  ;  $D, P, Q$  ;
- (d) les quatre droites  $(AS)$ ,  $(BR)$ ,  $(CQ)$  et  $(DP)$  sont les bissectrices intérieures du parallélogramme  $ABCD$ .

2. La droite  $(PR)$  recoupe les cercles  $(\mathcal{C}_2)$  et  $(\mathcal{C}_4)$  en les points  $U$  et  $W$  respectivement tandis que la droite  $(QS)$  recoupe les cercles  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_3)$  en  $V$  et  $T$  respectivement. Prouver que le quadrilatère  $UVWT$  est un rectangle "circonsrit" à  $ABCD$  (c'est-à-dire que chaque sommet de  $ABCD$  appartient à un côté de  $UVWT$ ).

3. Dégager une relation géométrique entre les quadrilatères  $PQRS$  et  $UVWT$ . En déduire l'existence d'un second cercle  $(\Gamma)$  tangent aux quatre cercles  $(\mathcal{C}_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer les méthodes, les outils et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé.

Q2. Présenter la figure sur la calculatrice. Que se passe-t-il si  $ABCD$  est un losange ? Le rectangle  $PQRS$  peut-il être un carré ?

Q3. Rédiger à l'intention des élèves un plan pour établir les propriétés de la question 1.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- a. sa réponse à la question Q3.
- b. un exercice sur le thème "Etude d'une configuration".

## DJ08.20.11 : Une relation d'Euler (08.O)

Préparation au CAPES 2008 – Université d'Orsay – Epreuve sur dossier

Oral blanc 2008

### Une relation d'Euler

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On considère un triangle ABC, (C) son cercle circonscrit de centre O et de rayon R et (G) son cercle inscrit de centre I et de rayon r. On appelle a, b, c, les longueurs respectives des côtés [BC], [CA], et [AB] ; on note p le demi-périmètre et S l'aire du triangle.

- 1) Etablir que  $S = p r$  et  $abc = 4 R S$
- 2) Prouver que I est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c)
- 3) Etablir la formule d'Euler

$$OI^2 = R^2 - 2 r R$$

en considérant le vecteur  $a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC}$  et en utilisant ce qui précède.

#### 2. Le travail proposé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Dégager les méthodes, les outils, les savoirs et les niveaux mis en jeu dans cet exercice  
Q.2) Représenter la figure à la calculatrice et commenter les renseignements que donne la formule en ce qui concerne la position des deux cercles (C) et (G)  
Q.3) Proposer une construction de O à la règle et au compas, connaissant (G), I, r et R

Sur sa fiche le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question 3 de l'exercice
- un exercice où l'on utilise le produit scalaire dans la résolution d'un problème



## 21 Problèmes sur les configurations (problèmes de longueur ou d'aire minimale)

### SA07-21-13 : Problème de Fagnano (07.1) - 1 page

Préparation au CAPES 2005 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

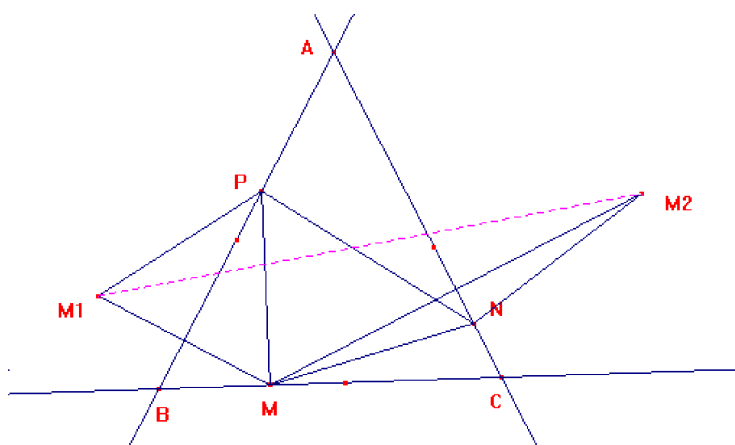
Dossier T20-SA13 Thème Géométrie : Problèmes de longueur minimum.

#### Exercice : Problème de Fagnano

Soit  $ABC$  un triangle acutangle. On se propose de déterminer les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  respectivement situés sur les côtés  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$  tels que le périmètre du triangle  $MNP$  soit minimal.

1. Soit  $M$  un point quelconque de  $[BC]$ .

On note  $M_1$  et  $M_2$  les symétriques de  $M$  par rapport à  $(AB)$  et  $(AC)$ .



- a) Déterminer les points  $N$  et  $P$  respectivement situés sur  $[AC]$  et  $[AB]$  tels que le périmètre du triangle  $MNP$  soit minimal.
  - b) Montrer que  $M_1M_2 = 2AM \sin \angle C$ .
2. En utilisant les résultats précédents, montrer que le périmètre du triangle  $MNP$  est minimal lorsque  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont les pieds des hauteurs du triangle  $ABC$ .

**Travail demandé au candidat :**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu l'exercice

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Présenter la figure sur la calculatrice.  
Expliquer comment amener les élèves à conjecturer la propriété cherchée.
3. Dans l'énoncé, on a supposé que le triangle  $ABC$  est acutangle.  
Que se passe-t-il si on ne fait plus cette hypothèse ?
4. Que représentent les hauteurs du triangle  $ABC$  pour le triangle  $MNP$  trouvé à la question 2.
5. Proposer un ou deux exercices sur le même thème.

# MC08-21-22 : Un rectangle d'aire maximale dans un tétraèdre (08.1) - 1 page

Préparation au CAPES – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T21-MC22

Thème : Optimisation - Problèmes de longueur ou d'aire minimale ou maximale

## 1. Exercice proposé au candidat :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0, a, 0)$ ,  $B(0, 0, b)$  et  $C(c, 0, b)$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent des réels strictement positifs.  $M$  est un point appartenant au segment  $[OB]$ . Le plan  $(P)$  passant par  $M$  et orthogonal à la droite  $(OB)$  coupe la droite  $(OC)$  en  $N$ , la droite  $(AC)$  en  $P$  et la droite  $(AB)$  en  $Q$ . On pose  $t = OM$ .

1. Démontrer que le quadrilatère  $MNPQ$  est un rectangle.
2. Exprimer en fonction de  $t$  les longueurs  $MN$  et  $MQ$ .
3. Déterminer la position du point  $M$  qui rend maximale l'aire du rectangle  $MNPQ$ .

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.  
Q.2) Détailler l'énoncé de la question 1. pour des élèves.

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse à la question Q.2)
- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : Optimisation - Problèmes de longueur ou d'aire minimale ou maximale

## 3. Quelques références au programme :

### Programme de Terminales S :

| Produit scalaire dans l'espace                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rappels sur le produit scalaire dans le plan. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal.                                                                                                       | Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan. Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Equation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan. Inéquation définissant un demi-espace.                                                                                                                                 | On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan ; à cette occasion, on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan. |
| Droites et plans dans l'espace                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                           |
| Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace. Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans. Discussion géométrique ; discussion algébrique. | On reprendra les problèmes d'alignement et de concours déjà abordés en classe de première.<br><br>On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont aussi l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement. On traitera aussi quelques situations numériques (issues de l'analyse, de situations économiques ou autres) s'y ramenant. | Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentée par un système de deux équations linéaires.                                                               |

**Thème : Problèmes sur les configurations**

**1. L'exercice proposé au candidat**

Sur la figure jointe :

- les points  $A$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  sont alignés ;
  - les cercles  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  et  $(\Gamma_3)$  ont pour centres respectifs  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  et pour rayons respectifs 10, 20 et 59 millimètres ;
  - le cercle  $(\Gamma_2)$  est tangent aux cercles  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_3)$  ;
  - le point  $A$  appartient à  $(\Gamma_1)$  ;
- 1) Construire, sur la figure jointe, à la règle et au compas, une droite  $(\Delta)$  passant par  $A$  et tangente à  $(\Gamma_3)$  (*on laissera visibles les traits de construction*).
  - 2) On appelle  $H$  le projeté orthogonal de  $O_2$  sur  $(\Delta)$ . Calculer la distance  $OH$  et justifier que  $(\Delta)$  coupe  $(\Gamma_2)$  en deux points, que l'on notera  $B$  et  $C$ .
  - 3) Calculer la distance  $BC$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

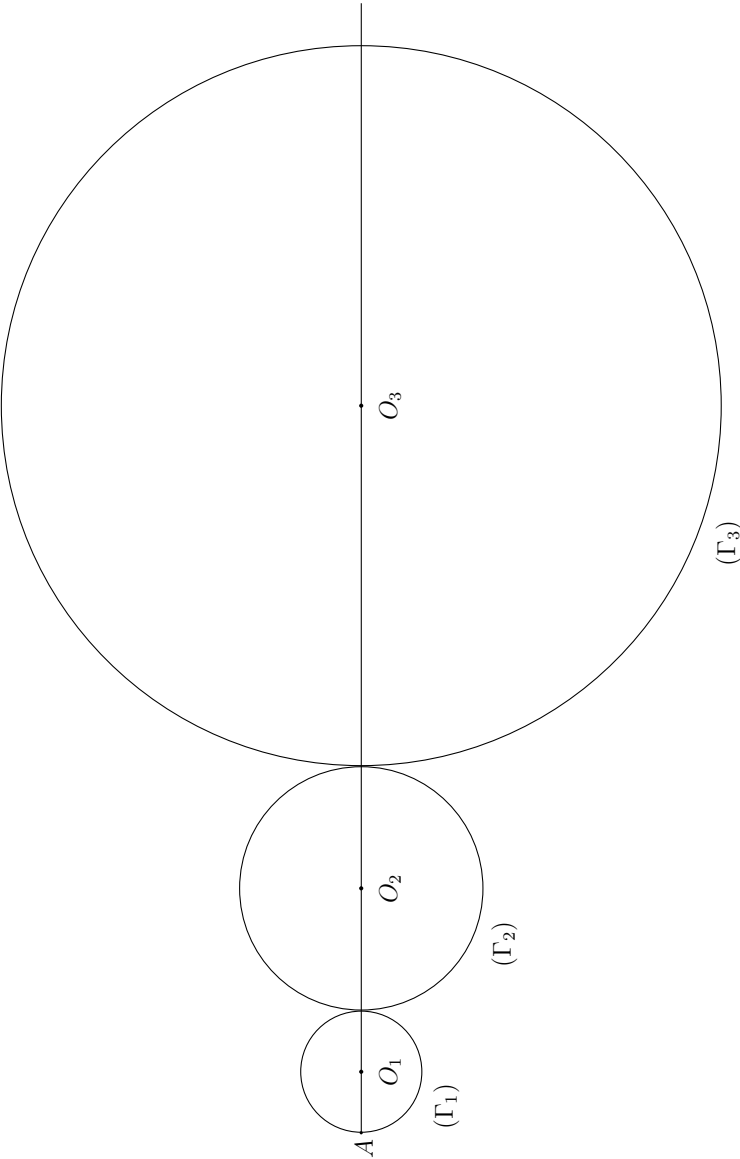
En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1)** Préciser les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q.2)** Proposer une solution de la question 2) telle que le candidat la présenterait à une classe.

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- 1) La réponse à la question **Q.2**).
- 2) La figure obtenue à la question 1) de l'exercice (à joindre au dossier).
- 3) L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** ».





## 22 Problèmes de recherche de lieux géométriques (donnés par des conditions géométriques) (3)

### CG05-22-11 : Lieu de points avec réciproque (06.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

#### Dossier 22-1

|                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques<br/>Donnés par des conditions géométriques.</b> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

$\mathcal{C}$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ ,  $H$  est un point tel que  $OH = 2r$ ,  $d$  est la droite perpendiculaire à  $(OH)$  passant par  $H$ . Un point mobile  $M$  décrit  $d$ . On mène par  $M$  les droites tangentes en  $B$  et  $C$  au cercle  $\mathcal{C}$ . La droite  $(OM)$  coupe  $(BC)$  en  $N$ . On cherche à déterminer le lieu de  $N$  lorsque  $M$  décrit  $d$ .

1° Soit  $I$  le point d'intersection de  $(BC)$  et de  $(OH)$ . Montrer que  $\overline{OI} \cdot \overline{OH} = r^2$  et en déduire que  $I$  est un point fixe intérieur à  $\mathcal{C}$ .

2° Montrer que  $N$  appartient au cercle  $\mathcal{C}'$  de diamètre  $[OI]$ .

3° Réciproquement, tout point du cercle  $\mathcal{C}'$  est-il un point  $N$  ?

4° Conclure.

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Présenter la figure sur la calculatrice et mettre en évidence les conjectures qu'elle permet de faire.

Q3 - Présenter une rédaction détaillée de la réciproque.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- Un exercice sur le même thème dont la résolution fait appel à une réciproque.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de 1<sup>ère</sup> S

Voir les paragraphes : Géométrie vectorielle – Produit scalaire et applications du produit scalaire.

Ainsi que le préambule : 5-Géométrie :

...la géométrie élémentaire est une école de pensée : on veillera à allier observations (à l'aide de logiciels de géométrie dynamique notamment) et mise en évidence des démarches et des propriétés des objets étudiés permettant de confirmer ou d'infirmer ces observations ; on prendra soin aussi de construire des îlots déductifs consistants et d'aborder divers types de raisonnements formateurs ; on incitera à la réflexion sur différents niveaux d'explicitation d'une démonstration.

## CG05-22-12 : Lieu de points par transformations (07.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier 22-3

|                                                             |
|-------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques</b> |
|-------------------------------------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Soit  $C$  un cercle fixe,  $[AB]$  une corde fixée de  $C$ , et  $M$  un point de  $C$  distinct de  $A$  et  $B$ . Soit  $D$  le point tel que  $MABD$  est un parallélogramme.

- 1) Déterminer l'ensemble des points  $D$  quand  $M$  décrit le cercle  $C$  privé de  $A$  et  $B$ .
- 2) Soit  $I$  le milieu de  $[MB]$ . Déterminer le lieu de  $I$  quand  $M$  décrit le cercle  $C$  privé de  $A$  et  $B$ .
- 3) Déterminer le lieu du centre de gravité  $G$  du triangle  $MBD$  quand  $M$  décrit le cercle  $C$  privé de  $A$  et  $B$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Présenter sur le calculatrice une construction animée de la figure permettant de conjecturer les réponses.

Q3 - Peut-on trouver le lieu de  $G$  sans passer par le lieu de  $I$  ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- Deux autres exercices permettant de trouver un lieu de points grâce à une transformation.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de 1<sup>er</sup>S

| Contenus                                                                                                                                                                                                                                                                         | Modalités de mise en oeuvre                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Transformations</b><br>Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle). | Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.                                                                                                                     | Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Lieux géométriques dans le plan</b>                                                                                                                                                                                                                                           | Les logiciels de géométrie dynamique seront utilisés pour visualiser certains lieux. On choisira quelques exemples mettant en évidence la diversité des méthodes de recherche (propriétés des configurations, vecteurs, produit scalaire, transformations, géométrie analytique). On veillera à traiter des cas nécessitant de démontrer une double inclusion | La problématique des lieux géométriques sera présente dans tous les paragraphes de géométrie. Elle ne fera pas l'objet d'un chapitre indépendant. Il s'agit de ne pas s'en tenir à une simple observation mais de mobiliser les connaissances pour établir mathématiquement diverses caractéristiques géométriques. On s'appuiera, le cas échéant, sur le caractère bijectif des transformations ou sur une démarche d'analyse-synthèse. |

# CG05-22-13 : Lieu de points par transformation et angle (05.0,09.1,09.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

## Dossier 22-5

### Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques Donnés par des conditions géométriques

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan affine, on donne un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et deux points fixes distincts  $A$  et  $B$  sur ce cercle. Un point mobile  $M$  décrit  $\mathcal{C}$  privé de  $A$  et  $B$ .

- 1) Quel est le lieu du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABM$  ?
- 2) Quel est le lieu de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABM$  ? (On supposera connue la propriété : « le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à chacun des côtés du triangle appartient au cercle circonscrit au triangle ».)
- 3) Soit  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABM$ .
  - a) Montrer que  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$ .
  - b) En déduire les valeurs prises par  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Quel peut être le rôle d'un logiciel de géométrie dynamique dans cet exercice ?

Q3 - Quelles propriétés des angles orientés vous ont servi pour résoudre la troisième question ? Pouvez-vous n'utiliser que des angles géométriques ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- Un autre exercice sur le même thème.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de 1<sup>ère</sup> S

| Contenus                                                                                                                                                | Modalités de mise en oeuvre                                                                                                                              | Commentaires                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Repérage</b><br>Repérage polaire dans le plan et trigonométrie ; mesure des angles orientés, mesure principale, relation de Chasles,...              |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                              |
| <b>Transformations</b><br>Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le | Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de | Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier. |

## **MCD06-22-6 : Symétrie de l'orthocentre (08.s-1)**

voir MCD06-20-6

## MC06-22-8 : Cercle et bissectrice (06.1) - 2 pages

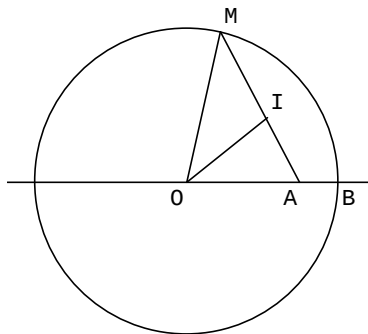
Préparation au CAPES 2006 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T22-MC08

Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques

### 1. L'exercice proposé au candidat



On considère un cercle (C) de centre O et de rayon r, un point B de (C) et un point A appartenant au segment [OB] distinct de O et de B. Soient M un point du cercle (C) et I le point d'intersection de la bissectrice de l'angle  $\widehat{AMO}$  avec le segment [AM].

Le but de l'exercice est de déterminer de trois façons le lieu de I lorsque M décrit le cercle (C).

#### 1) Recherche du lieu de I à l'aide d'une homothétie.

a) A l'aide de la loi des sinus dans OAI et OIM : montrer que  $AI = \frac{OA}{r + OA} AM$

b) En utilisant une homothétie déterminer le lieu de I.

#### 2) Recherche du lieu de I à l'aide des configurations.

a) La parallèle à (MB) passant par I coupe [OB] en C. Montrer que le triangle OCI est rectangle.

b) Soit D le point diamétralement opposé à B sur (C). En utilisant la propriété de Thalès dans les triangles AMD et AMB, montrer que C est un point fixe.

c) En déduire le lieu de I.

#### 3) Recherche du lieu à l'aide d'un repère orthonormé direct.

On se place dans le repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\vec{i} = \vec{OB}$ .

On pose  $M(\cos(t); \sin(t))$  avec  $t \in [0; 2\pi[$  et  $A(a; 0)$  avec  $a \in ]0; 1[$ .

a) Démontrer que I a pour coordonnées  $\left( \frac{2a}{1+a} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right); \frac{a}{1+a} \sin(t) \right)$ .

b) En déduire le lieu de I lorsque t décrit  $[0; 2\pi[$ .

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.

Q.2) Représenter le lieu de I à l'aide de Cabri-Géomètre.

Q.3) Y a-t-il des points particuliers (ou des valeurs particulières) à retirer ?

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

Deux exercices se rapportant au thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques

# SA07-22-22 : Intersection de tangente à un cercle (07.1) - 1 page

## Dossier T22-SA22

**Thème : Recherche de lieux géométriques déterminés par des conditions géométriques.**

### Exercice proposé au candidat :

**C** est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ ,  $A$  est un point donné tel que  $OA = 2R$ . Une droite  $d$  variable passant par  $A$ , sécante avec le cercle **C**, distincte de  $(OA)$ , coupe le cercle **C** en  $B$  et  $C$ . Les tangentes menées par  $B$  et  $C$  au cercle **C** se coupent en  $M$ .

1° Construire la figure. Emettre une conjecture sur le lieu **L** du point  $M$  lorsque  $d$  pivote autour de  $A$

2° Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(OA)$

a) Montrer que la droite  $(OM)$  est la médiatrice de  $[BC]$ .

b) Montrer que  $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB}$

c) Montrer que  $H$  est un point fixe que l'on précisera.

d) En déduire que  $M$  est sur une droite fixe  $\Delta$ .

3° Démontrer la conjecture émise à la question 1°.

### Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Expliquer la démarche générale de résolution d'un tel problème.

Q.2) Présenter la figure sur la calculatrice et mettre en évidence les conjectures qu'elle permet de faire.

Q.3) Rédiger un énoncé détaillé pour aider un élève à faire la question 3°.

### Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- La réponse à la question Q3.
- Un exercice sur le thème "Recherche de lieux géométriques déterminés par des conditions géométriques" dont la résolution fait appel à une réciproque.

### Quelques références au programme : Programme de 1<sup>ère</sup> S

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Géométrie vectorielle</b><br>Calcul vectoriel dans l'espace.<br><br>Barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace.<br>Associativité du barycentre.<br><br>Produit scalaire dans le plan ; définition, propriétés.<br><br>Applications du produit scalaire : projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe ; calculs de longueurs. | On étendra à l'espace les opérations sur les vecteurs du plan. On introduira la notion de vecteurs coplanaires.<br><br>On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites.<br><br>Propriétés de bilinéarité, de symétrie et expression analytique dans un repère orthonormal.<br><br>Équation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal, équation d'un cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre.<br>Calculs d'angles, de longueurs et d'aires sur des figures planes en liaison avec le produit scalaire ; on établira et utilisera la formule dite d'Al Kashi, le théorème de la médiane et les formules d'addition et de duplication pour les fonctions cosinus et sinus. | La notion de barycentre, utile en physique et en statistique, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera toute technicité. On n'étendra pas le produit scalaire à l'espace.<br><br>On pourra faire le lien avec le travail d'une force.<br><br>Pour certains exercices, il pourra être utile de disposer des formules reliant les sinus des angles, les côtés et l'aire d'un triangle.                                              |
| <b>Lieux géométriques dans le plan.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Les logiciels de géométrie dynamique seront utilisés pour visualiser certains lieux.<br><br>On choisira quelques exemples mettant en évidence la diversité des méthodes de recherche (propriétés des configurations, vecteurs, produit scalaire, transformations, géométrie analytique). On veillera à traiter des cas nécessitant de démontrer une double inclusion.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | La problématique des lieux géométriques sera présente dans tous les paragraphes de géométrie. Elle ne fera pas l'objet d'un chapitre indépendant.<br>Il s'agit de ne pas s'en tenir à une simple observation mais de mobiliser les connaissances pour établir mathématiquement diverses caractéristiques géométriques.<br>On s'appuiera, le cas échéant, sur le caractère bijectif des transformations ou sur une démarche d'analyse-synthèse. |

# MC08-22-20 : Lieu de deux sommets d'un carré (08.1) - 2 pages

Préparation au CAPES – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T22-MC20

Thème : Problèmes de recherche de lieu géométrique

## 1. Exercice proposé au candidat :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A(1;0)$  et  $B(0;1)$ . A tout point  $M$  du segment  $[AB]$ , on associe les points  $P$  et  $Q$ , projetés orthogonaux respectifs de  $M$  sur les droites  $(OA)$  et  $(OB)$ , et les points  $R$  et  $S$ , sommets du carré  $PRQS$  de diagonale  $[PQ]$  tels que  $\left(\frac{\vec{PR}}{PR}, \frac{\vec{PS}}{PS}\right) = \frac{\pi}{2}$ . On note aussi  $I$  le milieu du segment  $[PQ]$ .

Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points  $R$  et  $S$  lorsque  $M$  décrit le segment  $[AB]$ .

1. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Emettre une conjecture sur la nature des lieux des points  $R$  et  $S$ .
3. On note respectivement  $x$  et  $y$  l'abscisse et l'ordonnée de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - a) Calculer les coordonnées des points  $R$  et  $S$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
  - b) Démontrer la conjecture donnée à la question 2.

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Présenter la conjecture demandée à la calculatrice.
- Q.2) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q.3) Présenter un énoncé permettant de résoudre cet exercice sans utiliser les coordonnées de  $M$  (triangles isométriques ou semblables, isométries ou similitudes ...)

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.3)
- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : **Thème : Problèmes de recherche de lieu géométriques.**

## 3. Quelques références au programme : Programme de Terminale S

### Programme de Première S :

|                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Les logiciels de géométrie dynamique seront utilisés pour visualiser certains lieux.                                                                                                                                                                                      | La problématique des lieux géométriques sera présente dans tous les paragraphes de géométrie. Elle ne fera pas l'objet d'un chapitre indépendant.                                                                                                                                         |
| On choisira quelques exemples mettant en évidence la diversité des méthodes de recherche (propriétés des configurations, vecteurs, produit scalaire, transformations, géométrie analytique). On veillera à traiter des cas nécessitant de démontrer une double inclusion. | Il s'agit de ne pas s'en tenir à une simple observation mais de mobiliser les connaissances pour établir mathématiquement diverses caractéristiques géométriques.<br>On s'appuiera, le cas échéant, sur le caractère bijectif des transformations ou sur une démarche d'analyse-synthèse. |

## MC08-22-21 : Une équerre glissant sur deux axes (08.1) - 2 pages

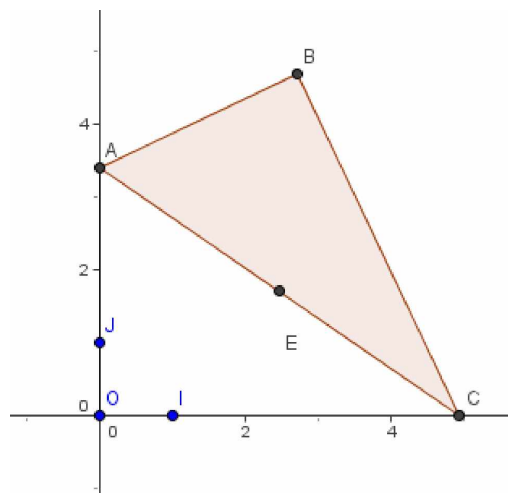
Préparation au CAPES – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T22-MC21

Thème : Problèmes de recherche de lieu géométrique à l'aide de considérations géométriques

### 1. Exercice proposé au candidat :



Le triangle ABC représente une équerre telle que  $AB = 3$ ,  $AC = 6$  et l'angle en B est droit.

Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires  $[OJ)$  et  $[OI)$ .

Le point E est le milieu du segment  $[AC]$ . On s'intéresse aux lieux des points E et B.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie ou bien d'une calculatrice, conjecturer le lieu des points E et B.
2. Déterminer le lieu du point E.
3. a) On suppose que A est distinct de O.

Déterminer une mesure de l'angle  $\angle AOB$  puis montrer que  $OB = 6 \sin(\angle AOB)$ .

- b) En déduire le lieu du point B.

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Présenter la conjecture demandée à la calculatrice.
- Q.2) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : Problèmes de recherche de lieu géométrique à l'aide de considérations géométriques.

## CG08-22-25 : Lieu de points : ellipse (08.1, 08.2) - 2 pages

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier T22-CG25

#### Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques Donnés par des conditions géométriques

##### 1. L'exercice proposé au candidat

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $M$  est le point de coordonnées  $(m; 0)$  avec  $0 \leq m \leq 3$ ,  $N$  est le point de coordonnées  $(0; n)$ ,  $n \geq 0$ , tel que  $MN = 3$  et  $J$  le point du segment  $[MN]$  tel que  $MJ = 2$ . L'objectif est de déterminer et tracer le lieu  $\mathcal{L}$  de  $J$  lorsque  $m$  décrit l'intervalle  $[0; 3]$ .

- 1) a) Prouvez que  $3\vec{OJ} = \vec{OM} + 2\vec{ON}$   
b) Démontrez que  $n = \sqrt{9 - m^2}$ . Déduisez-en les coordonnées  $(x; y)$  de  $J$  en fonction de  $m$ .
- 2) Prouver que  $y = 2\sqrt{1 - x^2}$  et donc que  $J$  appartient à la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 1]$  par  $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$ .
- 3) a) Prouvez que  $x$  appartient à l'intervalle  $[0; 1]$ . En déduire le lieu de  $J$ .  
c) Etudiez les variations de  $f$  et la dérivabilité de  $f$  au point 1. Tracez  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{L}$ .

##### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer et analyser les méthodes utilisées dans chaque question. Dégager les difficultés qu'elles peuvent présenter pour les élèves.

Q2 – Présenter sur la calculatrice une figure animée permettant le tracé du lieu  $\mathcal{L}$ .

Q3 – Montrer que le lieu trouvé est un quart d'ellipse, dont on déterminera les foyers, les directrices et l'excentricité. (*Cette question dépassant le cadre du programme de terminale ne pourrait pas vous être posée le jour de l'oral, mais on se permet de viser plus haut lors de la préparation*).

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- Deux autres exercices sur le même thème.

##### 3. Quelques références aux programmes

###### Programme de 1<sup>ère</sup> S

| Contenus                                                                                    | Modalités de mise en oeuvre                                                   | Commentaires                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Géométrie vectorielle</b><br>Barycentre de points pondérés dans le plan ou dans l'espace |                                                                               | La notion de barycentre, utile en physique et en statistiques, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. |
| <b>Lieux géométriques dans le plan</b>                                                      | Les logiciels de géométrie dynamique seront utilisés pour visualiser certains | La problématique des lieux géométriques sera présente dans tous                                           |

## DJ05-22-3 : lieux conditions géométriques (05.2)

Préparation au CAPES, Orsay, 2005

### Thème : Lieu déterminé par des conditions géométriques

#### Enoncé

ABC est un triangle équilatéral direct,  $(\mathbf{C})$  son cercle circonscrit,  $(\Gamma_A)$  l'arc de  $(\mathbf{C})$ , d'extrémités B et C, qui ne contient pas A. Notations analogues pour  $(\Gamma_B)$  et  $(\Gamma_C)$

M est un point de  $(\Gamma_A)$  (**H**)

On veut prouver que :  $MA = MB + MC$

- 1) Reformuler l'égalité à l'aide des points M, M', C où M' est l'image de M par la rotation de centre A, d'angle  $+\frac{\pi}{3}$
- 2) En considérant deux angles dont l'un est  $(\widehat{MC, MA})$ , achever de prouver l'égalité.
- 3) On veut déterminer l'ensemble des points M du plan tels que  $MA = MB + MC$ 
  - a) Prouver que  $MA = MB + MC$  si et seulement si  $C \in [MM']$
  - b) Prouver que  $C \in [MM']$  si et seulement si  $(\widehat{MC, MM'}) \equiv 0 (2\pi)$  et  $(\widehat{M'M, M'C}) \equiv 0 (2\pi)$
  - c) En calculant  $(\widehat{MC, MA}) - (\widehat{BC, BA})$  et  $(\widehat{MA, MB}) - (\widehat{CA, CB})$  en fonction des deux angles précédents, prouver que ces deux conditions équivalent à  
M est un point de  ${}^c(\Gamma_B)$  et M est un point de  ${}^c(\Gamma_C)$

#### Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

#### Après avoir résolu l'exercice

- 1) Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves
- 2) Préciser l'endroit du raisonnement où intervient l'hypothèse (**H**)
- 3) Pour prouver : si M est un point de  $(\Gamma_A)$ , alors  $MA = MB + MC$ ,  
rédiger sous forme d'exercice une méthode utilisant les complexes à partir d'un repère judicieux ; on introduira dans le calcul l'emploi de la formule

$$|e^{i\varphi} - 1|^2 = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

- 4) Proposer un autre exercice de lieu géométrique faisant intervenir une rotation

## LB09-22-2 : Lieu de points par transformation et avec réciproque (09.s)

Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique

### Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques.

#### I. EXERCICE PROPOSÉ

Dans le plan euclidien orienté, on considère un carré  $ABCD$  de centre  $O$ . On désigne par  $M$  un point du segment  $[B, C]$  distinct de  $B$  et  $P$  le point d'intersection de  $(AM)$  et  $(CD)$ . La perpendiculaire à  $(AM)$  passant par  $A$  coupe  $(CD)$  en  $Q$  et  $(BC)$  en  $R$ .

1. Construire la figure.
2. Montrer que les triangles  $APR$  et  $AMQ$  sont rectangles et isocèles.
3. Soit  $I$  le milieu de  $[PR]$  et  $J$  celui de  $[MQ]$ . Montrer qu'il existe une similitude directe transformant les points  $R$  et  $M$  en les points  $I$  et  $J$  respectivement. Déterminer ses éléments caractéristiques.
4. Déterminer le lieu géométrique du point  $J$  quand  $M$  décrit le segment  $[BC]$  privé de  $B$ .
5. Démontrer que  $I, B, D$  sont alignés.

#### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q1. Présenter, sur la calculatrice, la figure et l'animation permettant d'obtenir le lieu du point  $J$ .
- Q2. Indiquer les méthodes et propriétés mises en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q3. Présenter le plan de deux études du lieu géométrique du point  $I$  dans l'esprit de l'exercice proposé.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- a. sa réponse à la question Q3.
- b. un ou plusieurs exercices sur le thème “Problèmes de recherche de lieux géométriques”.

**Quelques références au programme :** programme de 1<sup>ère</sup> S, paragraphes *Transformations* et *Lieux géométriques dans le plan* ; programme de terminale S - spécialité, paragraphe *Similitudes planes*.

**Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques**

**1. L'exercice proposé au candidat**

On considère un carré  $ABCD$ . On désigne par  $M$  un point du segment  $[AC]$ . On note  $P$  (respectivement  $Q$ ) le projeté orthogonal du point  $M$  sur la droite  $(AD)$  (respectivement  $(DC)$ ).

- 1) Construire la figure.
- 2) Démontrer que les droites  $(CP)$  et  $(BQ)$  sont orthogonales.
- 3) On note  $N$  le point d'intersection des droites  $(CP)$  et  $(BQ)$ . Emettre une conjecture concernant le lieu du point  $N$  lorsque  $M$  décrit le segment  $[AC]$ .
- 4) Démontrer la conjecture émise.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

*Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :*

- Q.1)* Présenter, sur la calculatrice, la figure réalisée et l'animation permettant d'obtenir le lieu du point  $N$ .
- Q.2)* Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q.3)* Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le même thème au niveau de la classe de lycée de votre choix et dont la résolution fait appel aux transformations du plan.

**Thème : Problème de lieu****1. L'exercice proposé au candidat**

On considère dans le plan deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  sécantes en  $O$  et de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  tels que  $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ . On considère deux points  $A$  et  $B$  situés respectivement sur  $\Delta$  et  $\Delta'$ , distincts de  $O$  et tels que  $OA = OB$ . À tout point  $M$  du plan on associe la somme notée  $s(M)$ , des distances du point  $M$  aux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

- 1) Montrer que  $s(A) = s(B) = OA \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 2) Soit  $M$  un point du segment  $[AB]$ . En utilisant les aires des triangles  $OMA$  et  $OMB$ , montrer que la somme  $s(M)$  est indépendante de la position de  $M$  sur le segment  $[A, B]$ .
- 3) Calculer la distance  $OA$  afin que, pour tout point  $M$  du segment  $[AB]$ , l'on ait  $s(M) = 2$ .
- 4) Le point  $A$  étant fixé pour satisfaire la condition de la question précédente, on note  $\mathcal{L}$  le lieu des points  $M$  du plan tels que  $s(M) = 2$ . Montrer que  $\mathcal{L}$  contient un rectangle dont  $[AB]$  est un côté.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1)** Dégager les méthodes et les savoir-faire utilisés dans cet exercice.
- Q.2)** Présenter une animation sur le module de géométrie dynamique de la calculatrice mettant en évidence le résultat établi dans la question 2) de l'exercice.

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1**).
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Problème de lieu** ».

**Thème : Géométrie**  
**Problèmes de recherche de lieux géométriques****1. L'exercice proposé au candidat**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés. On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal{L}$  des points  $M$  du plan tels que les triangles  $MAB$  et  $MAC$  aient la même aire.

On note  $(\Delta_0)$  la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$  et  $(\Delta_1)$  la médiane issue de  $A$  dans  $ABC$ .

1) Montrer que l'ensemble  $(\Delta_0) \cup (\Delta_1)$  est inclus dans  $\mathcal{L}$ .

Pour tout point  $M$  distinct de  $A$ , on note  $d_B$  et  $d_C$  les distances respectives de  $B$  et  $C$  à la droite  $(AM)$ .

2) Soit  $M$  un point n'appartenant pas à  $(\Delta_0)$ . On appelle  $J$  l'intersection de la droite  $(AM)$  et de la droite  $(BC)$ .

- a) Montrer que si  $M \in \mathcal{L}$  alors  $d_B = d_C$ .
- b) En déduire que  $J$  est le milieu de  $[BC]$ .

3) Conclure.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation le candidat traitera les questions suivantes :*

**Q.1)** Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

**Q.2)** Proposer une solution de la question 2) telle que le candidat la présenterait à une classe.

*Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :*

- a) Sa réponse à la question **Q.2**).
- b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de recherche de lieux géométriques** ».



## 23 Problèmes de recherche de lieux géométriques (lignes de niveau)

### SA06-23-14 : Ligne de niveau et barycentre (06.1) - 1 page

T23-SA14

**Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques**  
**Lignes de niveau.**

#### Exercice proposé au candidat :

$ABC$  est un triangle tel que  $AB = AC = 3$  et  $BC = 2$ .

On note  $E_k$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = k$  où  $k$  est un réel donné.

Soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A, 4)$ ,  $(B, -1)$  et  $(C, -1)$

1° a) Faire une figure et construire le point  $G$ .

b) Calculer  $GA^2$ ,  $GB^2$  et  $GC^2$

c) Montrer que pour tout point  $M$  du plan,  $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MG^2 - 34$ .

2° Déterminer l'ensemble  $E_k$  pour les valeurs suivantes de  $k$ .

a)  $k = 32$       b)  $k = -40$       c)  $k = -34$ .

3° Déterminer l'ensemble  $E_k$  suivant les valeurs de  $k$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

#### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les outils mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Lorsqu'on change les coefficients numériques, obtient-on toujours le même type de résultat ?

#### Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.2

- plusieurs énoncés d'exercices portant sur le thème : **Lignes de niveau.**

#### Quelques références au programme : Programme de 1<sup>ère</sup> S

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Géométrie vectorielle</b><br/> Calcul vectoriel dans l'espace.</p> <p>Barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace.<br/> Associativité du barycentre.</p> <p>Produit scalaire dans le plan ;<br/> définition, propriétés.</p> <p>Applications du produit scalaire :<br/> projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe ; calculs de longueurs.</p> | <p>On étendra à l'espace les opérations sur les vecteurs du plan. On introduira la notion de vecteurs coplanaires.</p> <p>On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites.</p> <p>Propriétés de bilinéarité, de symétrie et expression analytique dans un repère orthonormal.</p> <p>Équation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal, équation d'un cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre.</p> <p>Calculs d'angles, de longueurs et d'aires sur des figures planes en liaison avec le produit scalaire ; on établira et utilisera la formule dite d'Al Kashi, le théorème de la médiane et les formules d'addition et de duplication pour les fonctions cosinus et sinus.</p> | <p>La notion de barycentre, utile en physique et en statistique, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera toute technicité. On n'étendra pas le produit scalaire à l'espace.</p> <p>On pourra faire le lien avec le travail d'une force.</p> <p>Pour certains exercices, il pourra être utile de disposer des formules reliant les sinus des angles, les côtés et l'aire d'un triangle.</p>                                                      |
| <p><b>Lieux géométriques dans le plan.</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <p>Les logiciels de géométrie dynamique seront utilisés pour visualiser certains lieux.</p> <p>On choisira quelques exemples mettant en évidence la diversité des méthodes de recherche (propriétés des configurations, vecteurs, produit scalaire, transformations, géométrie analytique). On veillera à traiter des cas nécessitant de démontrer une double inclusion.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>La problématique des lieux géométriques sera présente dans tous les paragraphes de géométrie. Elle ne fera pas l'objet d'un chapitre indépendant.</p> <p>Il s'agit de ne pas s'en tenir à une simple observation mais de mobiliser les connaissances pour établir mathématiquement diverses caractéristiques géométriques.</p> <p>On s'appuiera, le cas échéant, sur le caractère bijectif des transformations ou sur une démarche d'analyse-synthèse.</p> |

## 24 Outils (nombres complexes)

### DP04-24-11 : Construction du pentagone régulier (00)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

#### THÈME 24.

Outil : nombres complexes.

##### 1. Exercice proposé.

1. On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ,  $\alpha = \omega + \omega^4$ ,  $\beta = \omega^2 + \omega^3$ .
- a) Montrer qu'on a  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ .
- b) Calculer  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  et montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines de l'équation  $X^2 + X - 1 = 0$ .
- c) Calculer exactement  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ .
- 2) Dans le plan complexe, d'origine  $O$ , on considère le pentagone dont les sommets  $A, B, C, D, E$  ont respectivement pour affixes  $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ .
- a) Justifier que le pentagone  $\mathcal{P} = ABCDE$  est régulier.
- b) Calculer les affixes des projetés orthogonaux des sommets de  $\mathcal{P}$  sur l'axe des abscisses.
- c) Construire  $\mathcal{P}$  à la règle et au compas à partir des points  $O$  et  $A$ . (On pourra considérer le cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $-\frac{1}{4}$ , passant par le point  $M$  d'affixe  $\frac{i}{2}$ .)

##### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. La longueur  $a$  étant construite, expliquer construire  $\sqrt{a}$  à la règle et au compas.

Q3. Expliquer comment on peut construire un polygone régulier à 15 côtés à la règle et au compas.

**Sur ses fiches le candidat présentera :**

- Ses réponses aux questions Q2 et Q3.
- Un autre exercice sur le thème : *Outil : nombres complexes.*

# MC07-24-16 : Trois cercles concourants (07.1, 08.1) - 2 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T24-MC16

Thème : Outils \_ Nombres complexes

## 1. L'exercice proposé au candidat :

On considère trois cercles  $(C_I)$ ,  $(C_J)$  et  $(C_K)$  de centres respectifs I, J et K non alignés, de même rayon  $R$ , sécants deux à deux et concourants en un point O.

On note A le point d'intersection des cercles  $(C_J)$  et  $(C_K)$  distinct de O.

On note B le point d'intersection des cercles  $(C_I)$  et  $(C_K)$  distinct de O.

On note C le point d'intersection des cercles  $(C_I)$  et  $(C_J)$  distinct de O.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IA), (JB) et (KC) sont concourantes.

1. Montrer qu'on peut munir le plan d'un repère orthonormal direct tel que les affixes respectives  $z_I$ ,  $z_J$  et  $z_K$  des points I, J et K vérifient  $|z_I| = |z_J| = |z_K| = R$ . On se placera dorénavant dans ce repère.
2. Démontrer que l'axe du point C est égale à  $z_C = z_I + z_J$ .
3. Soit  $\Omega$  le milieu du segment [C K].  
Déterminer l'axe de  $\Omega$  en fonction de  $z_I$ ,  $z_J$  et  $z_K$  puis conclure.
4. Soit O' le symétrique du point O par rapport au point  $\Omega$ .  
Que désigne le point O' pour le triangle ABC ? pour le triangle IJK ?  
Démontrer que les centres de gravité des triangles IJK et ABC appartiennent à la droite (O  $\Omega$ ).

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Présenter la figure sur un logiciel de géométrie mettant en valeur ses propriétés.
- Q.2) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.
- Q.3) L'hypothèse "sécants deux à deux" est-elle nécessaire ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Deux exercices portant sur le thème : Outils \_ Nombres complexes

## SA07-24-23 : Un cercle et deux carrés (07.1) - 2 pages

Préparation au CAPES  
Université d'Orsay

Thème : Outils  
Les nombres complexes

Oral blanc 2007

### 1. Exercice proposé au candidat :

Dans le plan orienté, on considère les points  $O$  et  $A$  fixés et distincts, le cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[OA]$ , un point  $M$  variable appartenant au cercle  $\mathcal{C}$  et distinct des points  $O$  et  $A$ , ainsi que les carrés de sens direct  $MAPN$  et  $MKLO$ . La figure est représentée ci-contre.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et démontrer que le point  $N$  appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points  $O$  et  $A$  soient respectivement  $0$  et  $1$ .

On note  $k, l, m, n$  et  $p$  les affixes respectives des points  $K, L, M, N$  et  $P$ .

1. Démontrer que, quel que soit le point  $M$  sur le cercle  $\mathcal{C}$ , on a  $\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ .

2. Montrer que :  $l = im$ ,  $p = -im + 1 + i$ ,  $k = (1+i)m$  et que  $n = (1-i)m + i$ .

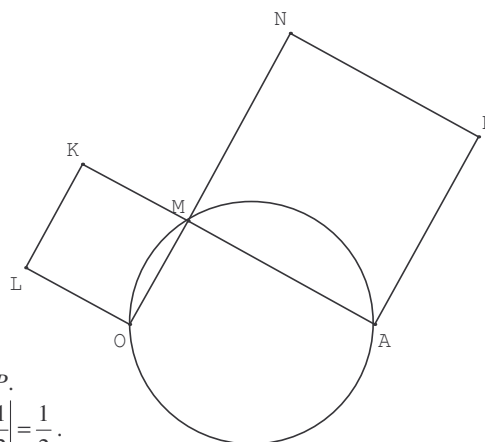
3. a. Démontrer que le milieu  $\Omega$  du segment  $[PL]$  est un point indépendant de la position du point  $M$  sur le cercle  $\mathcal{C}$ .

b. Démontrer que le point  $\Omega$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  et placer  $\Omega$  sur la figure.

4. Calculer la distance  $NK$  et démontrer que cette distance est constante.

5. Montrer que le triangle  $\Omega NK$  est rectangle isocèle.

6. En utilisant les résultats précédents, montrer que le point  $N$  appartient à un cercle fixe, indépendant du point  $M$ , dont on déterminera le centre et le rayon.



### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

Q.1 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2 Présenter, sur la calculatrice, la figure et l'animation permettant de conjecturer le résultat de la question 6.

Q.3 Quel prolongement peut-on proposer à cet exercice ?

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse à la question Q.3

- un ou deux exercices présentant la résolution à l'aide des nombres complexes, d'un problème de géométrie

**Thème : Outils**  
**Les nombres complexes****1. L'exercice proposé au candidat**

On se donne un rectangle  $ABCD$  (direct) et on pose  $AB = CD = a$ ,  $AD = BC = b$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ).

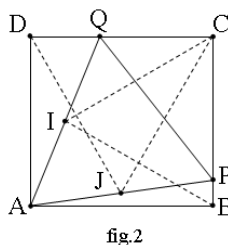
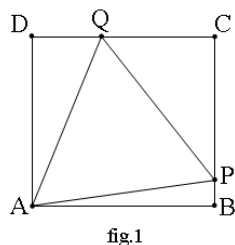
On se pose le problème suivant (cf fig.1) : existe-t-il un triangle équilatéral  $APQ$  inscrit dans le rectangle  $ABCD$  (le point  $P$  appartenant au segment  $[BC]$  et le point  $Q$  au segment  $[CD]$ ) ?

- 1) Soit  $P$  un point quelconque de  $[BC]$  et  $Q$  un point quelconque du segment  $[CD]$ .  
On pose  $DQ = x$  et  $BP = y$ . Montrer que  $APQ$  est équilatéral si et seulement si
- $$\begin{cases} x = 2a - b\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases}$$

*Indication : utiliser les affixes, et une rotation de centre  $A$ .*

- 2) En déduire que le problème a une solution si et seulement si  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$  et qu'alors elle est unique.
- 3) On suppose que le problème posé admet une solution. On construit les triangles équilatéraux  $BCI$  et  $CDJ$ , comme indiqué figure 2. Soit  $P$  le point d'intersection des droites  $(AJ)$  et  $(BC)$ , et  $Q$  le point d'intersection des droites  $(AI)$  et  $(CD)$ . Montrer que  $APQ$  est le triangle équilatéral cherché.

En déduire une construction du triangle  $APQ$  à la règle et au compas.



**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1)* Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.
- Q.2)* En utilisant l'environnement de géométrie dynamique de la calculatrice, construire le rectangle  $ABCD$  et le triangle équilatéral  $APQ$  (quand il existe). Animer la figure de façon à voir les conditions limites entre lesquelles le problème posé admet une solution.

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- Sa réponse à la question *Q.1*).
- Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « **Géométrie : nombres complexes** ».

## DJ05-24-5 : polygones réguliers (05.2)

Préparation au CAPES, Orsay, 2005

**Thème : Configurations usuelles**

**Polygones réguliers**

**Énoncé**

$P_n$  est un polygone régulier convexe direct inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, de sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ;  $a$  est la distance de  $O$  à chaque côté et  $l$  la longueur  $A_1A_2$ .

$P$  est un point intérieur à  $P_n$ ;  $H_1, H_2, \dots, H_n$  sont les projections orthogonales de  $P$  sur les droites  $(A_1A_2), (A_2A_3), \dots, (A_nA_1)$ .

I. Etude de  $f(P) = \sum_{k=1}^n PH_k$

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  étant un repère orthonormé direct, on note  $\vec{n}_k$  un vecteur unitaire normal à  $(A_kA_{k+1})$  et  $\alpha$  la mesure principale de l'angle  $(\vec{i}, \vec{A_1A_2})$

a) Prouver que l'on peut choisir  $\vec{n}_k$  pour que :  $M \in (A_kA_{k+1}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_k = a$

b) En déduire que :  $PH_k = a - \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}_k$

c) On note  $z_k$  l'affixe de  $\vec{n}_k$ ; déterminer  $\sum_{k=1}^n z_k$ ; en déduire la valeur de  $f(P)$ ; énoncer le résultat obtenu.

II. On cherche à déterminer l'ensemble  $C_n$  des points  $P$  intérieurs à  $P_n$  tels que chaque  $H_k$  appartienne au segment  $[A_kA_{k+1}]$ ;  $\overline{C_n}$  est la frontière de  $C_n$ .

1) Quel est  $\overline{C_n}$  lorsque  $n = 3$ ; lorsque  $n = 4$ ?

2) a) Dessiner  $\overline{C_6}$

b) On note A, B, C, D, E, F les sommets de  $P_6$ ; P, Q, R, S, T, U sont les points d'intersection respectifs de (AE) et (DF), (AE) et (BF), (BF) et (AC), (AC) et (BD), (BD) et (CE), (CE) et (DF). Prouver que P, Q, R, S, T, U sont les sommets d'un hexagone régulier.

c) Prouver que  $C_6$  est directement semblable à  $P_6$ ; on précisera les éléments de la similitude directe.

**Travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Après avoir résolu l'exercice**

- 1) Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.
- 2) Donner une définition d'un polygone régulier – au niveau second cycle ? – au niveau premier cycle ?
- 3) Un polygone convexe inscrit dont tous les angles sont égaux est-il régulier ?
- 4) Proposer une démonstration au niveau premier cycle de la propriété établie en I.
- 5) Pourquoi la démarche du I ne s'applique-t-elle plus dans le cas où  $P$  est extérieur à  $P_n$  ?
- 6) Quelle définition d'un polygone régulier est la plus adaptée à la question II. 2)b) ? Quelles propriétés de  $P_n$  sont mises en œuvre dans cette question ?
- 7) Proposer un exercice sur le même thème.

# JURY05-24-2906 : droite d'Euler (09.s)

## Sujet du dossier Thème : Outils - Les nombres complexes.

### I. EXERCICE PROPOSÉ

On se donne trois points non alignés  $A, B, C$  du plan, et le triangle  $T$  de sommets  $A, B, C$ . On se propose ici de démontrer *uniquement à l'aide des nombres complexes* la propriété géométrique classique suivante :

Les hauteurs de  $T$  sont concourantes en un point  $H$ , appelé *orthocentre* de  $T$ .

1. Montrer qu'on peut munir le plan d'un repère orthonormé tel que les affixes respectives  $a, b, c$  des points  $A, B, C$  soient de module 1.

On suppose qu'il en est ainsi dans la suite de l'exercice.

2. On définit le point  $H$  d'affixe  $h = a + b + c$ .

Montrer que les hauteurs du triangle  $T$  se coupent au point  $H$  (indication : considérer  $z = \frac{h - c}{b - a}$ ).

Montrer que  $H$  est aligné avec le centre de gravité de  $T$  et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Illustrer le résultat à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

Q3. Comment mettriez-vous en place, dans une classe, le choix du repère ? Quel(s) prolongement(s) pourriez-vous proposer à cet exercice ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

a. sa réponse à la question Q3.

b. un ou deux exercices présentant la résolution, à l'aide des complexes, d'un problème de géométrie.

**Quelques références au programme.** : programme de Terminale S, "Géométrie plane : nombres complexes" et "Similitudes planes (enseignement de spécialité)"

**Thème : Géométrie**  
**Interprétation géométrique des nombres complexes****1. L'exercice proposé au candidat**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On note  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

- 1) Soit  $A$  un point de  $(\Gamma)$  d'affixe  $a$ . On note  $(T_a)$  la tangente en  $A$  à  $(\Gamma)$ .

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ .

- a) Montrer que  $M$  appartient à  $(T_a)$  si et seulement si  $\frac{z-a}{a}$  est imaginaire pur.
- b) Dédire que  $M$  appartient à  $(T_a)$  si et seulement si  $z$  vérifie l'égalité :  $z\bar{a} + \bar{z}a = 2$ .
- 2) Soient  $A$  d'affixe  $a$  et  $B$  d'affixe  $b$  deux points distincts de  $(\Gamma)$  tels que  $a+b \neq 0$ .  
Montrer que les droites  $(T_a)$  et  $(T_b)$ , tangentes à  $(\Gamma)$  respectivement en  $A$  et  $B$ , sont sécantes et que leur point d'intersection a pour affixe  $\frac{2ab}{a+b}$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.  
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1)** Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q.2)** Proposer une solution de la question 1) telle que le candidat la présenterait à une classe.

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- 1) La réponse à la question **Q.2**).
- 2) L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Interprétation géométrique des nombres complexes** ».

# CG09-24-29 : Similitudes et longueur d'une spirale (09.O)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

Dossier Oral blanc 2009

**Thème : Outils : nombres complexes**

## 1. L'exercice proposé au candidat

Le plan complexe est muni d'un repère d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Pour le dessin on prendra 10 cm pour une unité. On donne le point  $K$  d'affixe 2, et on appelle  $r$  la rotation de centre  $K$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ , et  $h$  l'homothétie de centre  $K$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- 1) Soit  $s = h \circ r$ . Donner la nature de  $s$ , ses éléments caractéristiques, et son écriture complexe.
- 2) Montrer que si  $M' = s(M)$ , alors  $z - z' = i(2 - z')$ , où  $z$  et  $z'$  sont les affixes respectives de  $M$  et  $M'$ . En déduire la nature du triangle  $KMM'$ .
- 3) On pose  $A_0(2 + i)$  et  $A_{n+1} = s(A_n) \forall n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Montrer que  $z(A_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$
  - b) Pour quelles valeurs de  $n$  les points  $A_n$  sont ils sur l'axe des abscisses ?
  - c) Déterminer le plus petit entier  $n$  pour que  $A_n$  soit dans le disque de centre  $K$  et de rayon 1 cm.
  - d) Montrer que la longueur de la chaîne  $A_0A_1...A_n$  ne dépassera jamais 25 cm.

## 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 – Indiquer les différentes techniques de démonstration qui interviennent dans l'exercice.

Q2 – Proposer un énoncé au niveau de la classe de première permettant de construire la spirale  $A_0A_1...A_n$  et de calculer sa longueur sans utiliser les similitudes.

Q3 – Construire les points  $A_0, A_1, ..., A_3$  grâce à un logiciel de géométrie.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un ou deux autres exercices sur le thème : « Outils : nombres complexes ».

**Thème : Interprétation géométrique des nombres complexes****1. L'exercice proposé au candidat**

- 1) Les nombres complexes  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont donnés.

Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = a_1 \\ z_2 + z_3 = a_2 \\ z_3 + z_4 = a_3 \\ z_4 + z_1 = a_4 \end{cases}$$

d'inconnue  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ .

- 2) Dans le plan, on considère un quadrilatère  $A_1A_2A_3A_4$ .

Montrer qu'il existe un quadrilatère  $M_1M_2M_3M_4$  dont les milieux des côtés sont les points  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  si et seulement si le quadrilatère  $A_1A_2A_3A_4$  est un parallélogramme.

Montrer que, dans ce cas, le point de concours des diagonales du parallélogramme  $A_1A_2A_3A_4$  est l'isobarycentre des points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

**Q.1)** Dégager les diverses étapes de la résolution de la première question de l'exercice.

**Q.2)** Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu dans cet exercice.

*Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :*

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1**).
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Interprétation géométrique des nombres complexes** ».



## 25 Outils (transformations)

### CG06-25-14 : Composée de deux translations et une rotation (06.2,09.1,09.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

#### Dossier 25-2

#### Thème : Outils - Transformations

##### 1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan orienté, on considère la figure ci dessous :  $ABC$  et  $DEF$  sont des triangles équilatéraux directs.

On note  $G$  et  $H$  les points tels que  $EDBG$  et  $CDFH$  soient des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de démontrer que le triangle  $AGH$  est équilatéral.

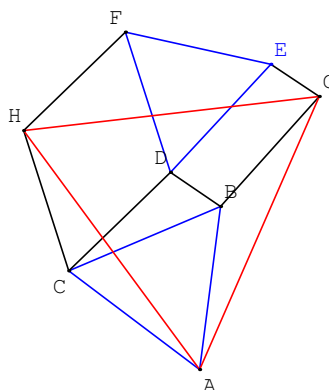
On note :

$t_1$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{BD}$ ,  $t_2$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{DC}$ ,

$r$  la rotation de centre  $D$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$ .

On pose  $R = t_2 \circ r \circ t_1$ .

- 1) Justifier que  $R$  est une rotation et préciser son angle. Déterminer l'image de  $B$  par  $R$  et en déduire le centre de la rotation  $R$ .
- 2) En utilisant  $R$ , montrer que le triangle  $AGH$  est équilatéral.



##### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Proposer une construction de la figure sur calculatrice permettant de faire varier la position des points  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $E$ .

Q3 - Proposer une résolution de cet exercice utilisant les nombres complexes, et une utilisant des triangles isométriques (niveau seconde).

SUITE ...

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- Les réponses à la question Q3.
- L'énoncé d'un autre exercice pour l'étude d'une configuration à l'aide des transformations.

### **3. Quelques références aux programmes**

#### **Programme de terminale S**

Voir les paragraphes : Géométrie plane : nombres complexes et en spécialité : similitudes planes.

#### **Programme de seconde**

Voir le paragraphe : triangles isométriques, triangles de même forme.

# MC06-25-9 : Triangles semblables et concours de droites (06.1) - 2 pages

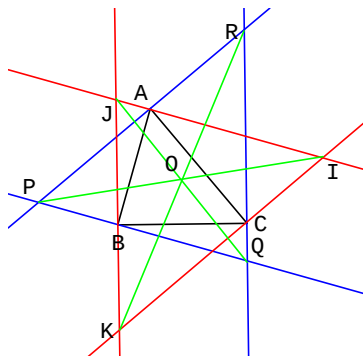
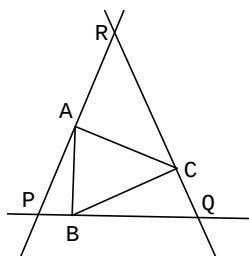
Préparation au CAPES 2006 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T25-MC09

Thème : Etudes de configurations à l'aide des similitudes

## 1. L'exercice proposé au candidat



ABC est un triangle quelconque.

Les perpendiculaires aux droites (AB), (BC) et (CA) passant respectivement par les sommets B, C, A définissent trois points P, Q, R.

- 1) Démontrer que les triangles ABC et PQR sont semblables avec des égalités d'angle.
- 2) Soit  $s$  la similitude directe qui transforme A en P et B en Q.
  - a) Déterminer l'angle de  $s$ .
  - b) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par  $s$ . En déduire  $s(C)$ .
  - c) Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?
- 3) Les perpendiculaires aux droites (AB), (BC) et (CA) passant respectivement par les sommets A, B, C définissent trois points I, J et K. Soit  $s'$  la similitude directe qui transforme A en I et B en J.
  - a) Montrer que  $s'(C) = K$ .
  - b) Démontrer que les droites (PI), (QJ) et (RK) sont concourantes.
- 4) Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. En symétrisant la figure de départ par rapport à O, démontrer que les segments [IP], [JQ] et [KR] sont concourants en O.

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.
- Q.2) Devait-on, pour cet exercice, préciser l'orientation du triangle ABC ?
- Q.3) On se place dans la première configuration en supposant que le triangle ABC est équilatéral direct. Proposer un énoncé d'exercice de niveau Seconde permettant de prouver que PQR est un triangle équilatéral de centre O.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.3)
- deux exercices se rapportant au thème : Etudes de configurations à l'aide des similitudes

## SA06-25-15 : Théorème de Napoléon (06.1, 09.1) - 1 page

Dossier T25-SA15

Thème Géométrie : Outils : transformations.

**Exercice :**

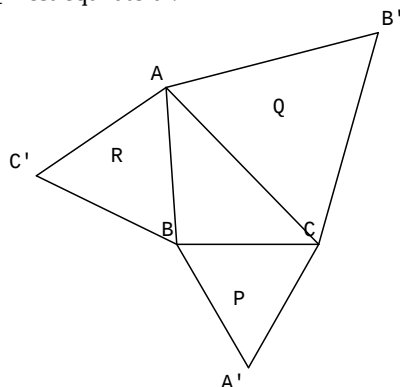
**Théorème de Napoléon :**

Dans le plan on construit extérieurement à un triangle  $ABC$  les triangles équilatéraux  $CBA'$ ,  $ACB'$  et  $BAC'$ . Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les centres de gravité respectifs des triangles  $CBA'$ ,  $ACB'$  et  $BAC'$ .

1° En utilisant des rotations, montrer que  $AA' = BB' = CC'$ .

2° En utilisant une similitude de centre  $C$ , montrer que  $PQ = \frac{\sqrt{3}}{3} AA'$ .

3° Montrer que le triangle  $PQR$  est équilatéral.



**Travail demandé au candidat :**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu l'exercice

1° Indiquer l'objectif de l'exercice. Dégager les méthodes, les différents outils utilisés et les savoirs mis en jeu. Préciser le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

2° Quelle hypothèse supplémentaire peut-on ajouter pour obtenir une rédaction satisfaisante aux questions 1° et 2° ?

3° Proposer sous forme d'exercice une autre méthode de résolution de ce problème en utilisant par exemple une composée de similitudes directes ou les nombres complexes.

4° Proposer deux exercices sur le même thème.

# SA06-25-16 : Théorème de Napoléon et similitudes (06.1) - 1 page

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

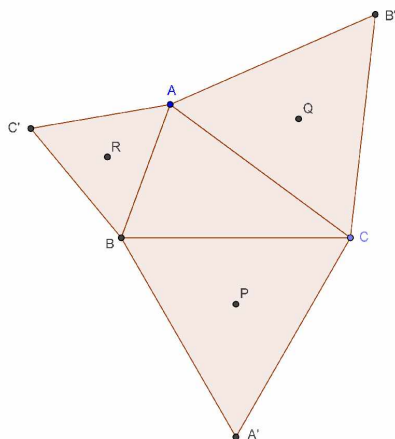
Dossier T25-SA16

Thème : Outils : transformations

## 1. L'exercice proposé au candidat

### Théorème de Napoléon

Dans le plan on construit extérieurement à un triangle  $ABC$  les triangles équilatéraux  $CBA'$ ,  $ACB'$  et  $BAC'$ . Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les centres de gravité respectifs des triangles  $CBA'$ ,  $ACB'$  et  $BAC'$ .



- 1) On note  $S_A$  la similitude directe de centre  $A$  qui transforme  $Q$  en  $C$ . Montrer que son rapport est  $\sqrt{3}$ . Quel est son angle ?
- 2) On note  $S_B$  la similitude directe de centre  $B$  qui transforme  $C$  en  $P$ . Déterminer son rapport et son angle.
- 3) En utilisant  $S_B \circ S_A$ , déterminer la nature du triangle  $PQR$ .

## 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice. Dégager les méthodes, les différents outils et les savoirs mis en jeu. Préciser le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - L'énoncé vous paraît-il suffisamment précis ?

Q3 - Proposer sous forme d'exercice une résolution de ce problème utilisant les nombres complexes.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- La réponse à la question Q3.
- Un ou deux exercices sur le même thème.

## 3. Quelques références aux programmes

### Programme de Terminale S

Voir le paragraphe Similitudes planes de l'enseignement de spécialité, ainsi que le paragraphe Nombres Complexes du tronc commun.

# SA07-25-17 : Triangles isocèles rectangles sur un triangle (07.1,09.1,09.2) - 1 page

Dossier T25-SA17

Thème : Outils  
Les transformations

## 1. Exercice proposé au candidat :

Soit  $ABC$  un triangle de sens direct, et  $P, Q, R$  les points tels que les triangles  $BPC, CQA$  et  $ARB$ , soient rectangles isocèles de sens direct respectivement en  $P, Q, R$ .

$A'$  est le milieu de  $[BC]$ .

1° Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe  $s$  de centre  $C$  qui transforme  $Q$  en  $A$ .

Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe  $s'$  de centre  $B$  qui transforme  $A$  en  $R$ .

2° En utilisant la composée  $s'o$ , déterminer la nature du triangle  $A'QR$ .

3° a) En utilisant  $s'o$ , montrer que les droites  $(BQ)$  et  $(PR)$  sont perpendiculaires

b) Montrer que les droites  $(AP), (BQ)$  et  $(CR)$  sont concourantes

Références : Terracher de TS spécialité 104 C) p 425 modifié

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 Présenter la figure à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

Q.2 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.3 Proposer sous forme d'exercice une autre méthode de résolution de ce problème

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.3

- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème "Outils : Transformations" au niveau de Terminale S enseignement de spécialité.

## 3. Quelques références au programme :

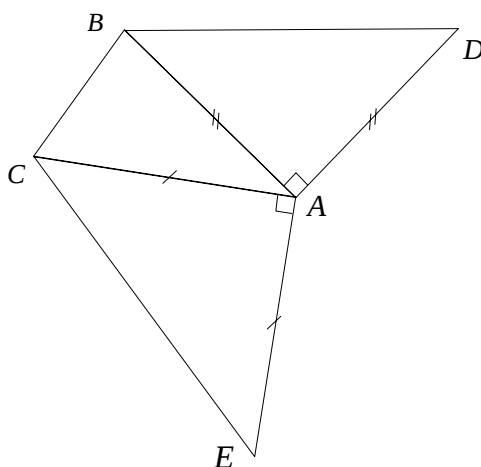
### Programme de Terminale S (enseignement de spécialité)

| CONTENUS                                                                                                                                                                               | MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Similitudes planes</b>                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\bar{z}+b$ ( $a$ non nul). | Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale. | La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\bar{z}+b$ ; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples. La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés. |
| Étude des similitudes directes                                                                                                                                                         | Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points $A, B, A', B'$ tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$ , il existe une unique similitude directe transformant $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$ .<br><br>Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.                 | La recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme.<br><br>On fera le lien avec les triangles semblables ou isométriques introduits en classe de seconde.                                                                                                                                                                            |

|                                                     |
|-----------------------------------------------------|
| <b>Thème : Outils</b><br><b>Les transformations</b> |
|-----------------------------------------------------|

**1. L'exercice proposé au candidat****1. L'exercice proposé au candidat**

Le plan est orienté. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés tels que  $ABC$  est un triangle direct. On désigne respectivement par  $D$  et  $E$  les points tels que les triangles  $ACE$  et  $ADB$  sont directs, rectangles et isocèles en  $A$ . Le point  $O$  est le milieu de  $[BC]$ .



Construire le point  $F$ , symétrique du point  $C$  par rapport à  $A$ .

En utilisant une rotation de centre  $A$  et une homothétie de centre  $C$ , montrer que les droites  $(AO)$  et  $(DE)$  sont perpendiculaires et que  $DE = 2AO$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.<br>Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :**

- Q.1) dégager les méthodes et savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice ;
- Q.2) présenter une construction de la figure sur la calculatrice, puis une animation permettant d'observer la propriété établie dans l'exercice.

**Sur ces fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- i) sa réponse à la question Q.1) ;
- ii) deux exercices sur le thème : « Outils : les transformations ».

## 26 Outils (aires, triangles isométriques et semblables)

### MCD06-26-3 : Rapport de longueurs, d'aires (06.s, 08.s-1)

Existe en deux versions (Laure Blasco)

Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique  
CAPES 2006 - Soutien Oral

#### Thème 26 : Outils (aires, triangles isométriques et semblables)

##### I. EXERCICE PROPOSÉ

Soit  $ABC$  un triangle. les bissectrices intérieures des angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$  coupent respectivement les côtés  $[CA]$  et  $[AB]$  en  $B'$  et  $C'$ .

1. En calculant de deux manières différentes les aires  $\mathcal{A}(ABB')$  et  $\mathcal{A}(CBB')$ , montrer l'égalité

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{BA}{BC}.$$

Montrer l'égalité  $\frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}$ .

2. A quelle condition les triangles  $BCC'$  et  $BCB'$  ont-ils même aire ? Montrer qu'on a alors  $\frac{C'A}{C'B} = \frac{B'A}{B'C}$ . Que peut-on dire du triangle  $ABC$  ?
3. L'égalité  $\mathcal{A}(BC'B') = \mathcal{A}(BCB')$  est-elle possible ?

##### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

1. Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
- Quel résultat concernant l'égalité des aires de triangles ayant un côté commun peut-on énoncer à la suite de la question 2 de l'exercice ?
- Les triangles  $ABB'$  et  $CBB'$  sont-ils semblables ?
- Autre question possible.* On appelle  $I$  le point d'intersection de  $(BB')$  et  $(CC')$ . Proposer une question supplémentaire permettant de préciser à quelle condition les points  $A$ ,  $B'$ ,  $I$  et  $C'$  sont cocycliques.

2. Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse aux questions b et c.
- un ou plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : Outils (aires, triangles isométriques et semblables).

*Le programme de troisième est disponible dans la salle.*

**THÈME 13.****Alignement et concours.****1. Exercice proposé.****Partie A**

Soit  $ABC$  un triangle et soit  $O$  un point du plan non situé sur les droites  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ . On suppose que la droite  $(AO)$  coupe  $(BC)$  en  $A'$ . Montrer qu'on a les égalités de rapports d'aires :

$$\frac{\mathcal{A}(AA'B)}{\mathcal{A}(AA'C)} = \frac{\mathcal{A}(OA'B)}{\mathcal{A}(OA'C)} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(OAB)}{\mathcal{A}(OAC)}.$$

**Partie B**

Soit  $ABC$  un triangle,  $A', B', C'$  trois points distincts des sommets appartenant respectivement aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ .

1) On suppose  $A', B', C'$  alignés. Montrer qu'on a la relation :

$$(*) \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

(On interprétera les rapports, au signe près, comme des rapports d'aires.)

2) Réciproquement, montrer que si la relation  $(*)$  est vérifiée les points  $A', B', C'$  sont alignés.

**2. Travail demandé au candidat.**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Discuter les cas de figures possibles. Comment, éventuellement avec d'autres outils, pourrait-on s'affranchir de cette étude ?

Q3. Indiquer comment on pourrait prouver le résultat de B1 en utilisant les homothéties.

**Sur ses fiches le candidat présentera :**

- Sa réponse aux questions Q2 et Q3.
- Un autre exercice sur le thème : *Alignement et concours*.

## CG06-26-15 : Démonstrations par les aires (06.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

### Dossier 26-3

|                               |
|-------------------------------|
| <b>Thème : Outils : aires</b> |
|-------------------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

L'objectif de l'exercice est de montrer la propriété suivante :

*Propriété : dans un trapèze non parallélogramme, les milieux des côtés parallèles, le point d'intersection des diagonales et le point d'intersection des côtés non parallèles sont alignés.*

- 1) Soit un triangle PQR, S le milieu de [QR]. M est un point tel que (PM) coupe le segment [QR].  
Démontrer que M appartient à (PS) si et seulement si l'aire du triangle MPQ est égale à l'aire du triangle MPR.
- 2) Soit un trapèze ABCD, non parallélogramme, de bases (AB) et (CD) tel que les côtés (AD) et (BC) se coupent en O et les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O'. I est le milieu de [AB] et J celui de [CD].
  - a) Démontrer que l'aire du triangle IOD est égale à celle du triangle IOC.
  - b) En déduire que les points O, I et J sont alignés.
  - c) Comparer les aires des triangles DIB, CIA, puis O'IC et O'ID.
  - d) En déduire l'alignement des points O, O', I et J.

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.
- Q2 - Quelles sont les propriétés relatives aux aires sur lesquelles s'appuie la résolution de cet exercice ?
- Q3 - Dégager au moins deux méthodes utilisant des outils différents, permettant de montrer la propriété de l'exercice.
- Q4 - Proposer sous forme d'exercices une démonstration par les aires de chacun des trois théorèmes suivants :

- Le théorème de Pythagore
- Le théorème de Thalès (configuration triangle)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q3.
- La réponse à la question Q4.

#### 3. Quelques références aux programmes

**Programmes de 5°, 4° et 3°**

Voir les paragraphes : Triangle (aire du triangle), Théorème de pythagore, Théorème de Thalès.

**Programme de 1°**

Notion de limite, fonction sinus.

# SA06-26-18 : Droites perpendiculaires dans un carré (06.1, 09.1) - 1 page

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

Dossier T26-SA18

**Thème :** Outils : triangles isométriques et semblables

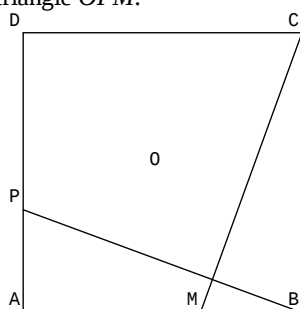
## 1. L'exercice proposé au candidat

Soit  $ABCD$  un carré de centre  $O$  et  $M$  un point de  $[AB]$ . La perpendiculaire à  $(CM)$  passant par  $B$  coupe  $(AD)$  en  $P$ .

1° Démontrer que les triangles  $MCB$  et  $ABP$  sont isométriques.

2° Démontrer que les triangles  $OMB$  et  $OPA$  sont isométriques.

3° En déduire la nature du triangle  $OPM$ .



## 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - Proposer sous forme d'exercice une autre méthode de résolution de ce problème.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un ou deux exercices sur le même thème et dont la résolution fait appel aux triangles isométriques et aux triangles semblables.

## 3. Quelques références aux programmes

### Programme de seconde

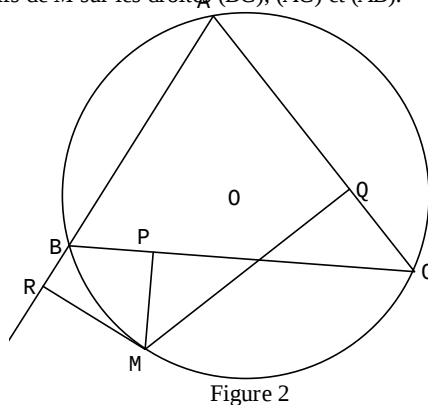
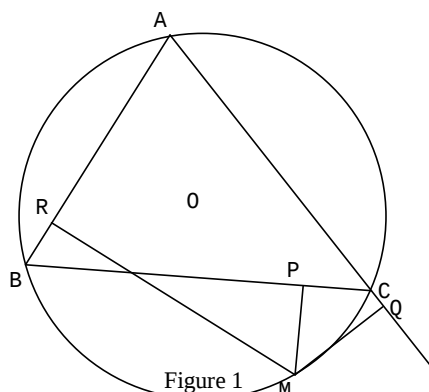
| Contenus                                         | Capacités attendues                                                                                                                      | Commentaires                     |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Triangles isométriques, triangles de même forme. | Reconnaître des triangles isométriques, reconnaître des triangles de même formes. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires. | Les problèmes seront choisis ... |

Dossier T26-SA20

Thème : Outil : Angles

## Exercice proposé au candidat:

$ABC$  est un triangle,  $\Gamma$  est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et  $M$  est un point de  $\Gamma$  distinct des sommets du triangle. Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les projetés orthogonaux respectifs de  $M$  sur les droites  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ .



1° Quelle conjecture peut-on faire sur les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  ?

Le but de l'exercice est de démontrer cette conjecture.

2° Etude de la figure 1 :

- Montrer que les points  $M$ ,  $P$ ,  $B$  et  $R$  sont sur un même cercle.
- Montrer que  $\angle MPR = \angle MCA$ .
- Montrer que  $\angle MPQ$  et  $\angle MCA$  sont supplémentaires.
- Conclure.

3° Etudier la figure 2.

4° Conclure.

Référence : 75 p 224 modulo de seconde

## Travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

## Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1 Présenter la figure sur la calculatrice et l'animer.

Q.2 Dégager les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

## Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse aux questions Q.1 et Q.2.

- plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : "Outil : Angles"

## Quelques références au programme :

Programme de troisième

Angles inscrit

Comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.

On généralise le résultat relatif à l'angle droit, établi en classe de quatrième. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc, mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné, autre qu'un angle droit, est hors programme.

Programme de seconde

Géométrie

Objectifs

Deux objectifs principaux sont assignés à cette partie du programme :

- développer la vision dans l'espace ;

- proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires.

Le calcul vectoriel et analytique est limité au minimum : entretien des acquis du collège ; utilisation en physique. Aucune notion nouvelle sur les transformations n'est envisagée.

On utilisera les possibilités qu'offrent les logiciels de géométrie.

## SA06-26-24 : Nature d'un triangle (06.1) - 1 page

Dossier T26-SA24

**Thème : Outils**  
**Triangles isométriques, triangles semblables.**

### Exercice proposé au candidat :

Données :

- un triangle  $ABC$  ;
- $AKB$  triangle rectangle isocèle en  $K$  "extérieur" au triangle  $ABC$  ;
- $CJA$  triangle rectangle isocèle en  $J$  "extérieur" au triangle  $ABC$  ;
- $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$

1° a) Construire la figure sur l'écran de la calculatrice et l'animer.

b) Conjecturer la nature du triangle  $KA'J$ .

2° Démontrer que les triangles  $A'C'K$  et  $A'B'J$  sont isométriques.

3° Démontrer la conjecture émise.

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1) Présenter la figure réalisée sur calculatrice. Quel est l'intérêt de l'animation de la figure ?

Q.2) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.2
- plusieurs énoncés d'exercices portant sur le thème : "Outil : triangles isométriques et triangles semblables"

**Quelques références au programme : Programme de seconde**

| CONTENUS                                         | CAPACITÉS ATTENDUES                                                                                                                                      | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Les configurations du plan.                      | Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. | Les problèmes seront choisis de façon :<br>- à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité,<br>- à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive,<br>- à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Triangles isométriques, triangles de même forme. | Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.                  | À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non.<br>On pourra utiliser la définition suivante : "deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre" (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme.<br>Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque,...). |

# SA07-26-19 : Théorème de Thalès par les aires (07.1) - 1 page

Dossier T26-SA19

Thème : Outils  
Les aires

## 1. Exercice proposé au candidat :

### Partie A :

1° Soient  $ABC$  un triangle et un point  $A'$  situé sur la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$ .

Montrer que les triangles  $ABC$  et  $A'BC$  ont la même aire.

2° Soient  $OAB$  un triangle et  $C$  un point de la droite  $(AB)$  distinct de  $A$ .

Montrer que  $\frac{AB}{AC} = \frac{A(OAB)}{A(OAC)}$ ,  $A(OAB)$  et  $A(OAC)$  désignant les aires respectives des triangles  $OAB$  et  $OAC$

### Partie B : Démonstration du théorème de Thalès par les aires

On considère un triangle  $ADE$ .  $B \in [AD]$  et  $C \in [AE]$  et les droites  $(BC)$  et  $(DE)$  sont parallèles.

1° Démontrer que les triangles  $ADC$  et  $ABE$  ont la même aire.

2° En utilisant les résultats précédents, montrer que :  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

Q.1 Quel prolongement peut-on proposer à cet exercice ?

Q.2 Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse à la question Q.1

- plusieurs énoncés d'exercices sur le thème : "Outil : Les aires"

## 3. Quelques références au programme : Programme de seconde

### Objectifs

Deux objectifs principaux sont assignés à cette partie du programme :

- développer la vision dans l'espace ;

- proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires.

Le calcul vectoriel et analytique est limité au minimum : entretien des acquis du collège ; utilisation en physique. Aucune notion nouvelle sur les transformations n'est envisagée.

On utilisera les possibilités qu'offrent les logiciels de géométrie.

| CONTENUS                                         | CAPACITÉS ATTENDUES                                                                                                                                      | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Les configurations du plan.                      | Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. | Les problèmes seront choisis de façon<br>- à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité,<br>- à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive,<br>- à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque). |
| Triangles isométriques, triangles de même forme. | Reconnaître des triangles isométriques.<br>Reconnaître des triangles de même forme.<br>Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.            | À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques                                                                                                    |

### THÈMES D'ÉTUDE

Pour chacun des chapitres, le professeur choisira, pour l'ensemble des élèves ou pour certains seulement en fonction de leurs centres d'intérêt, un ou plusieurs thèmes d'étude dans la liste ci-dessous.

#### Géométrie

- Patrons de pyramides non régulières.
- Repérage sur la sphère ; application à la géographie, à l'astronomie.
- Exemples de pavages périodiques du plan.
- Les solides de Platon.
- Exemples de démonstrations classiques par les aires : théorème de Pythagore, théorème de Thalès,...
- Représenter en perspective cavalière et en vraie grandeur une section plane d'un solide de référence dans des cas simples.
- Reconstitution d'un objet à partir de trois vues.
- Reconstitution d'un objet à partir d'une suite de coupes parallèles.
- Empilement de boules et cylindres de même diamètre.
- Exemples de réseaux dans le plan et l'espace (description, exemple des cristaux,...).
- Puzzle 3D (décomposition d'un cube, ...).
- Projections orthogonales d'une sphère ou d'un disque sur un plan.

## CG08-26-27 : Des triangles semblables pour une médiatrice (08.0) - 2 pages

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

T26-CG27

|                                                              |
|--------------------------------------------------------------|
| <b>Thème : Outils : triangles isométriques et semblables</b> |
|--------------------------------------------------------------|

### 1. L'exercice proposé au candidat

Soit ABCD un rectangle tel que  $AB = 15$  cm et  $BC = 9$  cm. On donne le point M sur le segment [AD] tel que  $AM = 4$  cm, et on définit le point E comme point d'intersection de (AB) avec la droite perpendiculaire à (MC) passant par D.

- 1) Montrer que les triangles DMC et AED sont semblables.
- 2) En déduire que  $AE = 3$  cm
- 3) Montrer que (MC) est la médiatrice de [DE].

### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 – Quelles sont toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux triangles soient semblables ? Quels sont tous les triangles semblables à DMC dans l'exercice ?

Q3 – Proposer une méthode de résolution de la première question de l'exercice en utilisant les similitudes. Préciser le niveau auquel on se place alors.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

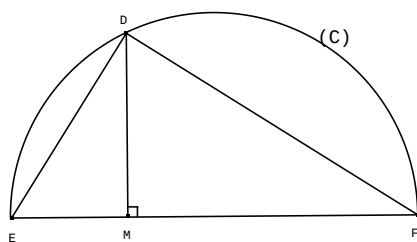
- La réponse à la question Q3.
- Deux autres exercices sur le thème : triangles isométriques et semblables.

**Thème : Outils**

Les triangles isométriques et les triangles de même forme

**1. L'exercice proposé au candidat**

On considère la figure suivante :



où  $D$  est un point de  $(C)$  demi-cercle de diamètre  $[EF]$  et où  $(DM)$  est perpendiculaire à  $(EF)$ . On pose  $EM = a$  et  $FM = b$ .

1. Montrer que les triangles  $EMD$  et  $DMF$  sont semblables.
2. En déduire l'expression de  $DM$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
3. a) Sur la figure jointe, on a construit dans un repère orthonormal, les points  $E(-1, 0)$  et  $F(x, 0)$  ( $x \geq 0$ ). Quelles sont, en fonction de  $x$ , les coordonnées du point  $A$ ?  
En déduire une construction point par point de la courbe représentative  $(\Gamma)$  d'une fonction usuelle.
- b) Construire sur la figure jointe quelques points de  $(\Gamma)$

**2. Le travail demandé au candidat**

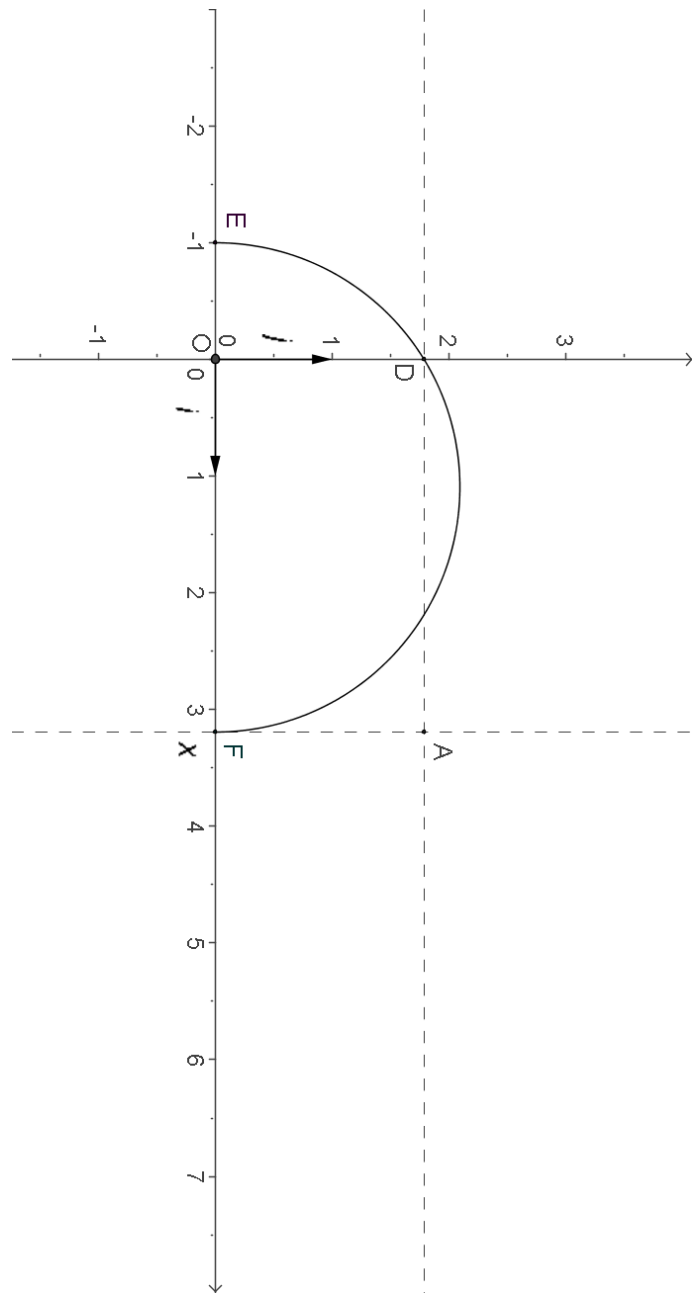
En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.
- Q.2) Compléter la figure jointe comme demandé dans l'exercice
- Q.3) Quelle autre méthode peut permettre d'obtenir l'expression de  $DM$  en fonction de  $a$  et  $b$ ?

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- (i) sa réponse aux questions Q.1) et Q.2)
- (ii) un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Outils : Les triangles isométriques et les triangles de même forme** ».



## MC09-26-25 : Théorème du papillon (09.0) 2 pages

Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique  
CAPES 2009 - Oral blanc

**Thème 26. Outils : les triangles isométriques et les triangles semblables.**

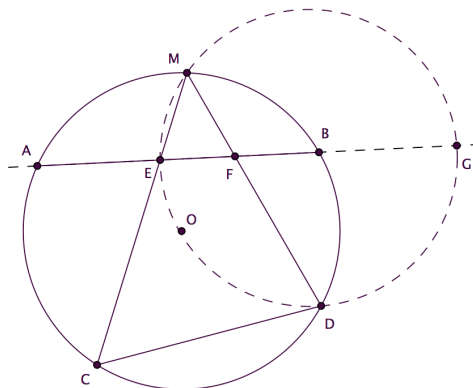
### I. EXERCICE PROPOSÉ AU CANDIDAT

1. **Résultat 1 : le théorème des cordes sécantes.** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle. Soient  $[MN]$  et  $[PQ]$  deux cordes de  $\mathcal{C}$  sécantes en un point  $I$ . Démontrer que les triangles  $IMP$  et  $INQ$  sont semblables. En déduire l'égalité :  $IM \times IN = IP \times IQ$ .

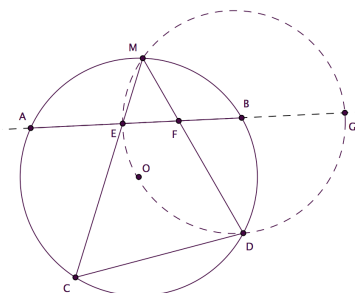
2. **Résultat 2 : le lemme de Haruki.** On considère deux cordes non sécantes  $[AB]$  et  $[CD]$  d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$ . Soit  $M$  un point, distinct de  $A$  et de  $B$ , de l'arc  $\widehat{AB}$  de  $\mathcal{C}$  qui ne contient pas  $C$  et  $D$ . Les cordes  $[MC]$  et  $[MD]$  coupent la corde  $[AB]$  respectivement en  $E$  et  $F$ . Le but de cette question est de montrer que le quotient  $\frac{AE \times BF}{EF}$  ne dépend pas de la position de  $M$ .

On note  $\mathcal{C}'$  le cercle circonscrit au triangle  $MED$ . La droite  $(AB)$  coupe le cercle  $\mathcal{C}'$  en  $E$  et en un point nommé  $G$ .

- Démontrer que les angles  $\widehat{CBD}$  et  $\widehat{AGD}$  sont égaux. En déduire que le point  $G$  est fixe.
- Démontrer les égalités suivantes :  $EA \times EB = EM \times EC$ ,  $FA \times FB = FM \times FD$  puis  $FA \times FB = FE \times FG$ .
- Conclure.



3. **Application : le théorème du Papillon.** Soit  $[MN]$  une corde d'un cercle  $\mathcal{C}$  et  $I$  son milieu. On considère deux cordes  $[AB]$  et  $[CD]$  de  $\mathcal{C}$  sécantes en  $I$ . La corde  $[MN]$  coupe les cordes  $[AD]$  et  $[CB]$  en  $M'$  et  $N'$  respectivement. Démontrer que  $I$  est le milieu de  $[M'N']$ .



### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

1. **Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q1. Présenter la figure de la question 2. de l'exercice à la calculatrice.
- Q2. Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
- Q3. Avec quel outil de Première S le Résultat 1 pourrait-il aussi être démontré ? Proposer un énoncé d'exercice permettant d'obtenir ce résultat avec cet outil.

2. **Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera.**

- sa réponse à la question Q.3.
- un ou plusieurs exercices se rapportant au thème :  
*Outils : les triangles isométriques et les triangles semblables.*

## 27 Outils (géométrie analytique et produit scalaire)

### CG05-27-16 : Barycentres, le cube qui tombe (06.2)

Capès externe de Mathématiques

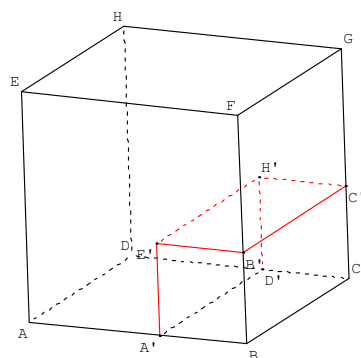
Epreuve sur dossier

#### Dossier 27-2

#### Thème : Outils : barycentres

##### 1. L'exercice proposé au candidat

On cherche à résoudre le problème suivant : étant donné un cube homogène de côté 1 m, posé sur une de ses bases ( $ABCD$ ), on découpe le long d'une arête inférieure ( $BC$ ) un pavé droit de section carrée de côté  $x$  et on cherche à partir de quelle valeur de  $x$  le cube ainsi découpé va tomber.



On ramène le problème à l'étude dans le plan de la position du centre de gravité  $K$  du polygône  $AA'E'B'FE$ . On munit ce plan du repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$  et on admet que le solide tombe dès que l'abscisse de  $K$  est supérieure à celle de  $A'$ .

- 1) Calculer l'abscisse de  $K$  en disant que  $K$  est le barycentre des centres des rectangles  $AA'E'F'$  et  $E'B'F'F'$  pondérés respectivement par les aires de ces rectangles.
- 2) En déduire la valeur de  $x$  pour laquelle le solide tombe.

##### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 - On aurait pu calculer  $K$  autrement : donner deux façons différentes, choisir celle qui vous paraît la plus simple. Déduire de ce qui précède une construction graphique simple de  $K$ .

Q3 - Cet exercice permet de montrer que trois droites sont concourantes. Lesquelles ?

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un autre exercice sur le thème « Outils : Barycentres ».

##### 3. Quelques références aux programmes

**Programme de 1<sup>ère</sup> S** - Voir le paragraphe : Géométrie vectorielle : barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace. Associativité du barycentre.

## MC06-27-10 : Configuration de deux carrés (06.1, 08.1,09.1,09.2) - 3 pages

Préparation au CAPES 2006 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

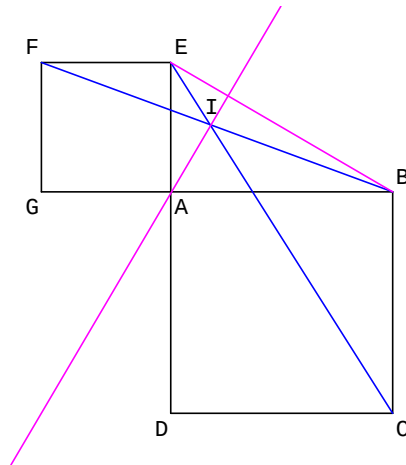
Dossier T27-MC10

Thème : Outils - Géométrie analytique

### 1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux carrés ABCD et AEFG disposés comme dans la figure ci-dessous et on désigne par I le point d'intersection des droites (BF) et (CE).

Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AI) et (BE) sont orthogonales.



- 1) On pose  $b = AB$  et  $e = AE$ . On se place dans le repère  $\left( A; \frac{1}{b} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{e} \overrightarrow{AE} \right)$ .

Préciser les coordonnées des sommets des carrés ABCD et AEFG.

- 2) Déterminer une équation cartésienne des droites (BF) et (CE) et justifier que ces deux droites sont sécantes. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.  
3) Déterminer une équation cartésienne de la droite ( $\Delta$ ) perpendiculaire à (EB) passant par A.  
4) Vérifier que I appartient à ( $\Delta$ ) puis conclure.

### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.  
Q.2) Pouvait-on éviter la question 3) dans cet exercice ?  
Q.3) Pouvait-on éviter de calculer les coordonnées de I dans la question 2) de cet exercice ?  
Q.4) Ecrire un énoncé qui résout géométriquement ce problème (On pourra par exemple considérer le quart de tour direct de centre O où O est le milieu de [CF]).

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question Q.4).
- deux exercices se rapportant au thème : Outils - Géométrie analytique.

# MC06-27-11 : Angle au centre d'un tétraèdre régulier (06.1) - 2 pages

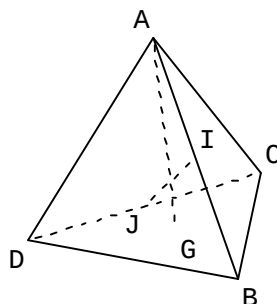
Préparation au CAPES 2006 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T27-MC11

Thème : Configurations usuelles

## 1. L'exercice proposé au candidat



ABCD est un tétraèdre régulier d'arête  $a$ .

G est le centre de gravité du triangle BCD. I et J sont les milieux de [AB] et [CD].

1. Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ .  
En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
2. Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$ .  
En déduire que G est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
3. Soit O l'isobarycentre de {A,B,C,D}.  
Démontrer que A, O et G sont alignés et que O est le milieu de [IJ].
4. Démontrer que les hauteurs du tétraèdre (droites orthogonales aux faces passant par les sommets opposés) concourent en O.
5. Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ .  
En déduire une valeur approchée à 0,1 près de l'angle  $\widehat{AOB}$  en degré.

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.  
Indiquez le niveau auquel se situe cet exercice.
- Q.2) Que représente aussi le point O pour le tétraèdre ?  
Ecrire un énoncé d'exercice permettant de découvrir les propriétés de ce point au niveau Seconde.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.2)
- un exercice de géométrie dans l'espace se rapportant au thème : Configurations usuelles

## **SA06-27-9 : Barycentre dans un tétraèdre (06.1) - 1 page**

voir SA07-13-9

# CG07-27-22 : Distance entre deux droites de l'espace (08.1, 08.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

## Dossier T27-CG22

### Thème : Outils : géométrie analytique

#### 1. L'exercice proposé au candidat

L'espace est muni d'un repère orthonomé  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On donne les droites  $D_1(A_1, \vec{u}_1)$  et  $D_2(A_2, \vec{u}_2)$  avec  $A_1(2, -1, 1)$ ,  $A_2(0, 2, 1)$ ,  $\vec{u}_1(-1, 2, 1)$ ,  $\vec{u}_2(2, -3, 1)$ .

- 1) Vérifier que ces deux droites ne sont pas coplanaires.
- 2) Soit  $P$  le plan contenant  $D_1$  et parallèle à  $D_2$ . Donner une équation cartésienne de  $P$ .
- 3) Calculer la distance de  $A_2$  à  $P$ . Montrer qu'il s'agit de la plus courte distance entre  $D_1$  et  $D_2$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q.2 - Reconstruire l'exercice en montrant l'existence de la perpendiculaire commune et en l'utilisant pour calculer la plus courte distance.

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Un autre exercice sur le même thème, dans l'espace.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de Terminale S : géométrie

| Contenus                                                                                                                                                                                                  | Modalités de mise en oeuvre                                                                                                                                         | Commentaires                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Produit scalaire dans l'espace</b><br>Rappels sur le produit scalaire dans le plan.<br>Définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Propriétés, expression dans un repère orthonormal. | ...Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Equation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan.                              |                                                                                                                            |
| <b>Droites et plans de l'espace</b><br>Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans.<br>Discussion géométrique ; discussion algébrique.                                          | On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont aussi l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement | Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentée par un système de deux équations de plans. |

# CG07-27-23 : Trois plans et une sphère (07.2,09.1,09.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

## Dossier T27-CG23

### Thème : Outils : géométrie analytique

#### 1. L'exercice proposé au candidat

L'espace est muni d'un repère orthonomé  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On donne les trois plans  $P_1$  d'équation :  $-7x + y + 3z + 3 = 0$

$P_2$  d'équation :  $5x + 4y + z + 3 = 0$

$P_3$  d'équation :  $x + 2y + z - 3 = 0$

- 1) Etudier l'intersection des plans  $P_2$  et  $P_3$ .
- 2) Etudier la position relative des trois plans.
- 3) Peut-on trouver une sphère qui soit tangente aux trois plans ? Donner une méthode.

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q.1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q.2 – Quelles sont les positions relatives possibles de trois plans de l'espace ?

Q.3 - Détailler la question 3) et donner les coordonnées du centre d'une telle sphère en utilisant la calculatrice .

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q.2.
- Un autre exercice sur le même thème, dans l'espace.

#### 3. Quelques références aux programmes

##### Programme de Terminale S : géométrie

| Contenus                                                                                                                                                         | Modalités de mise en oeuvre                                                                                                                                         | Commentaires                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Droites et plans de l'espace</b><br>Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans.<br>Discussion géométrique ; discussion algébrique. | On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont aussi l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement | Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentée par un système de deux équations de plans |

##### Programme de Première ES : spécialité

| Contenus                                                                                                               | Modalités de mise en oeuvre                                                                                                                     | Commentaires                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| <b>Géométrie dans l'espace</b><br>Equation cartésienne d'un plan.                                                      |                                                                                                                                                 |                                                                             |
| <b>Calcul matriciel</b><br>Application à la résolution de problèmes faisant intervenir un système linéaire d'équations | On interprétera géométriquement les systèmes à trois inconnues.<br>On exploitera les possibilités offertes par les tableurs et la calculatrice. | On utilisera calculatrices et tableurs pour les dimensions supérieures à 2. |

**Thème : Outils**

Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

**1. L'exercice proposé au candidat**

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère l'ensemble  $(\mathcal{S})$  défini par :

$$\mathcal{S} = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E}; x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0\}$$

- 1) Montrer que  $(\mathcal{S})$  est une sphère dont on donnera le centre et le rayon.
- 2) Montrer que le point  $A(2, 2, -1)$  appartient à  $(\mathcal{S})$  et déterminer une équation cartésienne du plan  $(\mathcal{P}_1)$  tangent à  $(\mathcal{S})$  au point  $A$ .
- 3)
  - a) Montrer que le plan  $(\mathcal{P}_2)$  d'équation  $x + y - z - 1 = 0$  coupe  $(\mathcal{S})$ .
  - b) Déterminer le rayon du cercle  $(\mathcal{C})$  intersection de  $(\mathcal{P}_2)$  et  $(\mathcal{S})$ .
  - c) Déterminer les coordonnées du point  $\Omega$  centre de  $(\mathcal{C})$ .

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.
- Q.2) Rédiger un énoncé détaillé pour aider un élève de Terminale S à faire la question 3) c).

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- Sa réponse à la question Q.2).
- Les énoncés de deux exercices de géométrie analytique dont l'un au moins permet de résoudre un problème posé dans l'espace.

|                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"><b>Thème : Outils</b><br/><b>Le calcul vectoriel et la géométrie analytique</b></p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**1. L'exercice proposé au candidat**

On considère dans le plan  $P$  rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  le cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et de rayon 1.

Soit  $A$  le point de coordonnées  $(1; 0)$  et soit  $A'$  le point de coordonnées  $(-1; 0)$ .

- 1) Pour tout point  $H$  du segment  $[AA']$ , distinct de  $A$  et  $A'$ , on mène la perpendiculaire  $\Delta$  à la droite  $(AA')$ . La droite  $\Delta$  coupe le cercle  $\Gamma$  en  $M$  et  $M'$ . On pose  $\overrightarrow{OH} = x \vec{i}$ . Calculer, en fonction de  $x$ , l'aire du triangle  $AMM'$ .
- 2) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[-1; 1]$  par  $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que le triangle,  $AMM'$ , d'aire maximale est équilatéral.

**2. Le travail demandé au candidat**

|                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Dégager les méthodes et les théorèmes utilisés dans cet exercice.
- Q.2) Construire, à l'aide du module de géométrie d'une calculatrice, la figure proposée et conjecturer à l'aide de cette figure le résultat attendu.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

Deux exercices sur le thème : « **Le calcul vectoriel et la géométrie analytique.** »

**Thème : Outils**  
**Les barycentres**

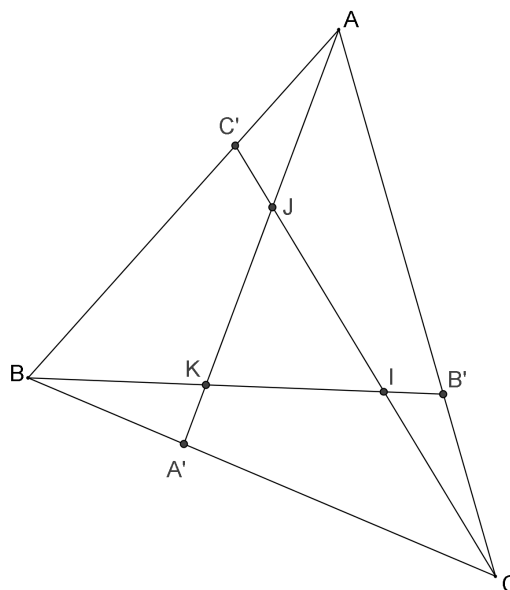
**1. L'exercice proposé au candidat**

Soit  $ABC$  un triangle du plan.

Les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont respectivement définis par  $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ .

Les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  se coupent en un point  $K$ , les droites  $(BB')$  et  $(CC')$  se coupent en un point  $I$  et les droites  $(AA')$  et  $(CC')$  en un point  $J$ .

- 1) Ecrire les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  comme barycentres des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- 2) Montrer que le point  $I$  est barycentre de  $(A, 2)$ ,  $(B, 1)$  et  $(C, 4)$ .
- 3) Définir de même les points  $J$  et  $K$  comme barycentres des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- 4) Montrer que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont respectivement les milieux de  $[CJ]$ ,  $[AK]$ , et  $[BI]$ .
- 5) En déduire une comparaison des aires des triangles  $BKJ$ ,  $IJK$ ,  $ABJ$  et  $AIJ$  et déterminer le rapport des aires des triangles  $ABC$  et  $IJK$ .



**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Énoncer les propriétés des barycentres utilisées dans cet exercice.
- Q.2) Quelle réponse feriez-vous à un élève qui vous demanderait comment traiter la question 2) si les coefficients n'étaient pas fournis ?

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- Sa réponse à la question Q.1).
- Les énoncés d'un ou plusieurs autres exercices, dans lesquels une étude barycentrique permet de mettre en évidence des propriétés géométriques, en variant les situations étudiées.

## DJ05-27-5 : polygones réguliers (05.2)

Préparation au CAPES, Orsay, 2005

**Thème : Configurations usuelles**

**Polygones réguliers**

**Énoncé**

$P_n$  est un polygone régulier convexe direct inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, de sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ;  $a$  est la distance de  $O$  à chaque côté et  $l$  la longueur  $A_1A_2$ .

$P$  est un point intérieur à  $P_n$ ;  $H_1, H_2, \dots, H_n$  sont les projections orthogonales de  $P$  sur les droites  $(A_1A_2), (A_2A_3), \dots, (A_nA_1)$ .

I. Etude de  $f(P) = \sum_{k=1}^n PH_k$

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  étant un repère orthonormé direct, on note  $\vec{n}_k$  un vecteur unitaire normal à  $(A_kA_{k+1})$  et  $\alpha$  la mesure principale de l'angle  $(\vec{i}, \vec{A_1A_2})$

a) Prouver que l'on peut choisir  $\vec{n}_k$  pour que :  $M \in (A_kA_{k+1}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_k = a$

b) En déduire que :  $PH_k = a - \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}_k$

c) On note  $z_k$  l'affixe de  $\vec{n}_k$ ; déterminer  $\sum_{k=1}^n z_k$ ; en déduire la valeur de  $f(P)$ ; énoncer le résultat obtenu.

II. On cherche à déterminer l'ensemble  $C_n$  des points  $P$  intérieurs à  $P_n$  tels que chaque  $H_k$  appartienne au segment  $[A_kA_{k+1}]$ ;  $\overline{C_n}$  est la frontière de  $C_n$ .

1) Quel est  $\overline{C_n}$  lorsque  $n = 3$ ; lorsque  $n = 4$ ?

2) a) Dessiner  $\overline{C_6}$

b) On note A, B, C, D, E, F les sommets de  $P_6$ ; P, Q, R, S, T, U sont les points d'intersection respectifs de (AE) et (DF), (AE) et (BF), (BF) et (AC), (AC) et (BD), (BD) et (CE), (CE) et (DF). Prouver que P, Q, R, S, T, U sont les sommets d'un hexagone régulier.

c) Prouver que  $C_6$  est directement semblable à  $P_6$ ; on précisera les éléments de la similitude directe.

**Travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

**Après avoir résolu l'exercice**

- 1) Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.
- 2) Donner une définition d'un polygone régulier – au niveau second cycle ? – au niveau premier cycle ?
- 3) Un polygone convexe inscrit dont tous les angles sont égaux est-il régulier ?
- 4) Proposer une démonstration au niveau premier cycle de la propriété établie en I.
- 5) Pourquoi la démarche du I ne s'applique-t-elle plus dans le cas où  $P$  est extérieur à  $P_n$  ?
- 6) Quelle définition d'un polygone régulier est la plus adaptée à la question II. 2)b) ? Quelles propriétés de  $P_n$  sont mises en œuvre dans cette question ?
- 7) Proposer un exercice sur le même thème.

**Thème : Outils - calcul vectoriel****1. L'exercice proposé au candidat**

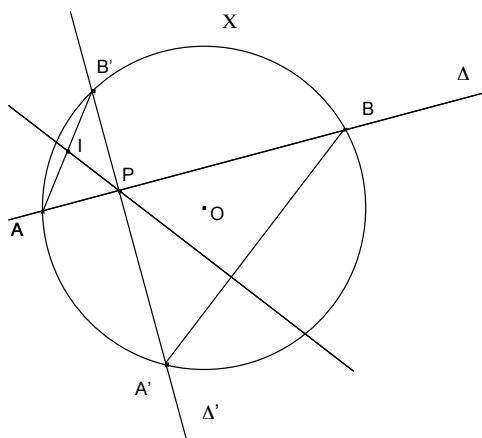
On considère un cercle  $X$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  et un point  $P$  du plan. On pose  $d = OP$ .

1. Une droite  $\Delta$  passant par  $P$  coupe le cercle  $X$  en  $A$  et  $B$ . On note  $E$  le point du cercle  $X$  diamétralement opposé à  $A$ .

Démontrer que  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PE}$ . En déduire que  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = d^2 - r^2$ .

2. Application à l'étude d'une configuration :

Dans la figure ci-dessous les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont orthogonales et le point  $I$  est le milieu du segment  $[AB']$ . Démontrer que les droites  $(PI)$  et  $(A'B)$  sont orthogonales.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1)** Indiquer, pour chacune des questions de l'exercice, les savoirs mis en jeu.  
**Q.2)** Rédiger une solution de la question 2 de l'exercice telle que le candidat la présenterait à un élève de Première S.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2**.
- ◇ Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Outils - Calcul vectoriel** ».



## 28 Équations de surfaces

### CG07-28-1 : Points d'un cône à coordonnées entières (07.2)

Capes externe de Mathématiques

Epreuve sur dossier

#### Dossier 04-4

|                      |
|----------------------|
| Thème : Arithmétique |
|----------------------|

#### 1. L'exercice proposé au candidat

- 1) L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
  - a) Montrer que les plans  $P$  et  $Q$  d'équations respectives  $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$  et  $2x - z = 0$  ne sont pas parallèles.
  - b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$  intersection des plans  $P$  et  $Q$ .
  - c) On considère le cône de révolution  $\Gamma$  d'axe  $(Ox)$  contenant la droite  $\Delta$  pour génératrice. Montrer que  $\Gamma$  a pour équation cartésienne  $y^2 + z^2 = 7x^2$ .
- 2)
  - a) Montrer que l'équation  $x^2 \equiv 3[7]$ , dont l'inconnue  $x$  est un entier relatif, n'a pas de solution.
  - b) Puis montrer la propriété suivante : pour tous entiers relatifs  $a$  et  $b$ , si 7 divise  $a^2 + b^2$ , alors 7 divise  $a$  et 7 divise  $b$ .
- 3)
  - a) Soient  $a, b, c$  des entiers relatifs non nuls. Montrer que : si le point  $A$  de coordonnées  $(a, b, c)$  est un point du cône  $\Gamma$ , alors  $a, b$ , et  $c$  sont divisibles par 7.
  - b) En déduire que le seul point de  $\Gamma$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet du cône.

#### 2. Le travail demandé au candidat

|                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.

Q2 – Préciser les types de raisonnement utilisés pour les questions 2) et 3)b).

**Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- La réponse à la question Q2.
- Deux autres exercices variés sur le thème : Arithmétique.

#### 3. Quelques références aux programmes

**Programme de Terminale S :**

Voir les paragraphes :

- Arithmétique en spécialité
- Droites et plans de l'espace
- Sections planes de surfaces en spécialité

## 29 Sections planes de surfaces, coniques

### MC06-29-12 : Cône et coniques (06.1, 09.1) - 1 page

Préparation au CAPES 2006 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T29-MC12

Thème : Problèmes sur les surfaces - Sections planes de surface

#### 1. L'exercice proposé au candidat

On se place dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace.

On considère la surface (C) d'équation  $x^2 + y^2 = z^2$  et le plan (P) = (ABR) avec A(1,0,0), B(1,1,0) et R(0,0,r). Soit  $\vec{u}$  le vecteur de coordonnées  $(-1,0,r)$

1) Démontrer que le plan (P) est égal au plan  $(A; \vec{j}, \vec{u})$  et que (P) a pour équation :  $r x + z - r = 0$

2) Soit M un point de (P) de coordonnées (x,y,z) dans  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et (X,Y) dans  $(A; \vec{j}, \vec{u})$

Déterminer x, y et z en fonction de X et Y

3) Démontrer que l'intersection de (C) avec (P) est la courbe (E) d'équation  $X^2 = (r^2 - 1)Y^2 + 2Y - 1$  dans le plan  $(A; \vec{j}, \vec{u})$  en déduire la nature de (E) lorsque  $r = 0, -1$  ou  $1$

#### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer les différentes méthodes et les savoirs utilisés dans cet exercice.

Q.2) Décrire sans démonstration la nature de (E) selon les valeurs de r. On pourra utiliser un transparent.

Q.3) On prend  $r = \sqrt{2}$ . Rédiger un énoncé permettant à un élève de Terminale S de déterminer la nature de la courbe (E) dans ce cas particulier.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.3)

- deux exercices se rapportant au thème : Problèmes sur les surfaces - Sections planes de surface

#### 3. Quelques références au programme : Programme de Terminale S

| Sections planes de surfaces |                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                             | Sections de cônes et cylindres illimités d'axes (Oz) par des plans parallèles aux plans de coordonnées. | L'objectif est de montrer qu'une fonction de deux variables peut être représentée par une surface et que des études de coupes par des plans permettent leur étude à l'aide des outils déjà vus pour les fonctions d'une variable.<br>Pour les sections de cônes, on pourra faire le lien avec les hyperboles d'équations $xy=k$ . |
|                             | Surfaces d'équation $z=x^2+y^2$ ou $z=xy$ coupées par des plans parallèles aux plans de coordonnées.    | On visualisera sur écran les surfaces étudiées.<br>On entraînera à la reconnaissance des surfaces à partir de coupes parallèles à un plan, et on associera les visions géométrique et analytique.                                                                                                                                 |

CG06-29-24 : Cône et hyperbole (08.1, 08.2)

Dossier T29-CG24

Thème : Sections planes de surfaces, coniques

1. L'exercice proposé au candidat

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormal  $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ , on considère le tronc de cône C dont la base, située dans le plan  $(xOy)$ , est le cercle de centre O et de rayon 2, et dont le sommet S a pour coordonnées  $(0\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{5})$ . L'unité de longueur est de 2 cm.

- 1°) Construire un patron du tronc de cône C.
- 2°) Déterminer ce tronc de cône analytiquement.
- 3°) Etudier les intersections de ce cône avec le plan  $(xOz)$ , et avec le plan P d'équation :  $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .
- 4°) Soit  $E(0,1,\sqrt{5})$ . Démontrer que la trace du plan Q d'équation  $y = 1$  sur le cône C est un arc d'une branche d'hyperbole, dont on donnera une équation cartésienne dans le repère  $(E;\vec{i},\vec{k})$  du plan Q. Représenter cette trace dans ce repère.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, après avoir résolu l'exercice, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q1 - Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour les élèves.
- Q2 - En quoi l'utilisation de l'assistant graphique d'un tableur peut-elle rendre compte de différentes sections d'un cône par un plan ?
- Q3 - Quelles difficultés la question 4°) présente-t-elle pour un élève de lycée ? Réécrire l'énoncé de cette question pour la rendre accessible.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- La réponse à la question Q3.
- Un autre exercice sur le même thème.

3. Quelques références aux programmes

| Programme de Terminale S spécialité |                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Contenus                            | Modalités de mise en oeuvre                                                                                                                                                                                           | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Sections planes de surfaces         | Sections de cônes et de cylindres illimités d'axes (Oz) par des plans parallèles aux axes de coordonnées.<br><br>Surfaces d'équation $z=x^2+y^2$ ou $z=xy$ coupées par des plans parallèles aux plans de coordonnées. | L'objectif est de montrer qu'une fonction de deux variables peut être représentée par une surface et que des études de coupes par des plans permettent leur étude à l'aide des outils déjà vus pour les fonctions d'une variable. Pour les sections de cônes, on pourra faire le lien avec les hyperboles d'équation $xy=k$ .<br>On visualisera sur écran les surfaces étudiées.<br>On entraînera à la reconnaissance des surfaces à partir de coupes parallèles à un plan, et on associera les visions géométrique et analytique. |



## 30 Configurations usuelles (triangle, tétraèdre, polygones réguliers) (3)

### MCD05-30-1 : Section de tétraèdre (05.s)

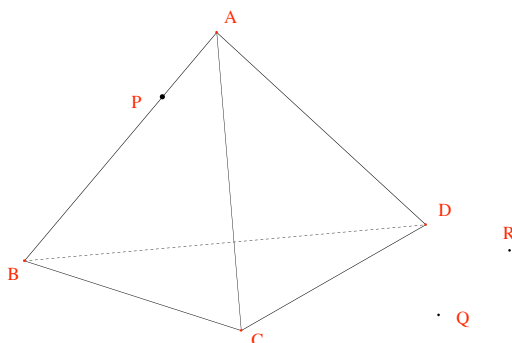
Université Paris-Sud  
Centre d'Orsay

Mathématique  
CAPES 2005 - Soutien Oral

#### Thème 30 : Configurations usuelles (triangle, tétraèdre, polygones réguliers)

##### I. EXERCICE PROPOSÉ

Sur la représentation en perspective ci-dessous,  $ABCD$  est un tétraèdre,  $P$  un point de  $[AB]$ ,  $Q$  et  $R$  des points du plan  $(BCD)$ . Tracer sur cette représentation l'intersection du plan  $(PQR)$  et du tétraèdre.

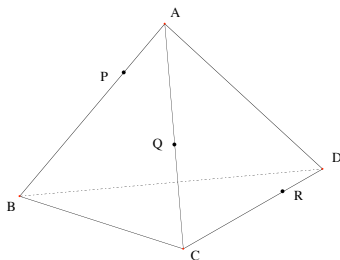


##### II. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

1. **Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :** (*Toutes les figures seront présentées sur transparents.*)

- Indiquez l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
- Montrez que, dans les différents cas de figure, la section est en général un triangle ou un quadrilatère convexe. Proposez un cas de figure où la section est un quadrilatère.
- Proposez l'énoncé d'un exercice préparatoire à celui du jury à partir de la situation particulière suivante : Les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont respectivement sur les arêtes  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[CD]$  d'un tétraèdre  $ABCD$ .



2. **Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :**

- sa réponse à la question c.
- un exercice sur le thème "Configurations usuelles (triangle, tétraèdre, polygones réguliers)".

## DP04-30-11 : Construction du pentagone régulier (00)

Préparation au CAPES, ORSAY, 2006-2007

### THÈME 24.

Outil : nombres complexes.

#### 1. Exercice proposé.

1. On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ,  $\alpha = \omega + \omega^4$ ,  $\beta = \omega^2 + \omega^3$ .
  - a) Montrer qu'on a  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ .
  - b) Calculer  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  et montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines de l'équation  $X^2 + X - 1 = 0$ .
  - c) Calculer exactement  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ .
- 2) Dans le plan complexe, d'origine  $O$ , on considère le pentagone dont les sommets  $A, B, C, D, E$  ont respectivement pour affixes  $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ .
  - a) Justifier que le pentagone  $\mathcal{P} = ABCDE$  est régulier.
  - b) Calculer les affixes des projetés orthogonaux des sommets de  $\mathcal{P}$  sur l'axe des abscisses.
  - c) Construire  $\mathcal{P}$  à la règle et au compas à partir des points  $O$  et  $A$ . (On pourra considérer le cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $-\frac{1}{4}$ , passant par le point  $M$  d'affixe  $\frac{i}{2}$ .)

#### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) auquel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. La longueur  $a$  étant construite, expliquer construire  $\sqrt{a}$  à la règle et au compas.

Q3. Expliquer comment on peut construire un polygone régulier à 15 côtés à la règle et au compas.

**Sur ses fiches le candidat présentera :**

- Ses réponses aux questions Q2 et Q3.
- Un autre exercice sur le thème : *Outil : nombres complexes*.

## 31 Angles (orientés ou non)

### MCD05-31-2

**Thème 19 : Etude de configurations.**

**Thème 26 : Angles**

**Rotation envoyant un cercle sur un autre**

#### 1. EXERCICE PROPOSÉ

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère deux cercles tangents  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  de centres respectifs  $O$  et  $O'$ , de même rayon  $R$ , tangents extérieurement en  $A$ . A tout point  $M$  de  $\Gamma$ , on associe le point  $M'$  de  $\Gamma'$  tel que  $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})} = \frac{\pi}{2}$ .

1. Démontrez qu'il existe une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , dont vous construirez géométriquement le centre  $\Omega$ , qui transforme  $\Gamma$  en  $\Gamma'$ . Quelle est l'image de  $M$  par cette rotation ?

2. Démontrez que le milieu  $I$  de  $[MM']$  est l'image de  $M$  par une similitude directe  $f$  de centre  $\Omega$ . Déterminez les éléments caractéristiques de cette similitude. Déduisez-en le lieu  $\mathcal{L}$  de  $I$  quand  $M$  décrit  $\Gamma$ .

3. Donnez l'image de  $O$  par la similitude  $f$  et une mesure de l'angle  $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AI})}$ .

#### 2. TRAVAIL DEMANDÉ AU CANDIDAT

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Après avoir résolu l'exercice :**

1. Indiquez l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

2. Réalisez une figure à la calculatrice et faites apparaître le lieu du point  $I$ .

3. Proposez le plan de deux autres solutions du problème de lieu traité dans cet exercice dont une utilisant le produit scalaire. (Dans le temps de préparation, il n'est pas attendu que vous ayez pu résoudre toutes les questions soulevées par ces solutions mais on souhaite que les plans soient suffisamment détaillés.)

4. Proposez d'autres énoncés illustrant l'emploi des transformations dans le traitement des problèmes de lieux.

## Enoncé de l'exercice proposé :

Figure 1 :

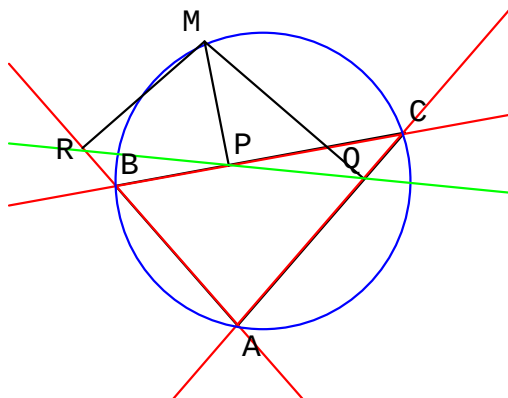
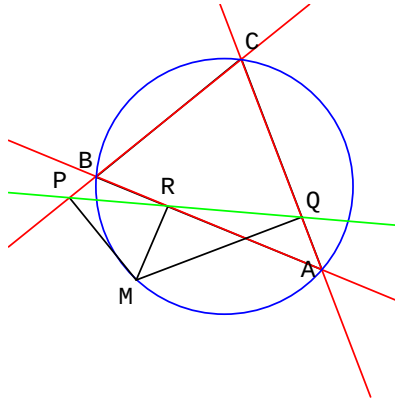


Figure 2 :



Soient ABC un triangle et M un point quelconque du cercle (Γ) circonscrit à ABC distinct des points A et B.

Soient P, Q et R les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB)

1. Etude de la figure 1.

a) Démontrer que  $\angle MPR = \angle MCA$ .

b) Comparer les angles  $\angle MPR$  et  $\angle MQC$ .

c) En déduire que les points P, Q, et R sont alignés.

2. Démontrer de même que, sur la deuxième figure, les points P, Q, et R sont alignés

## Travail demandé :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice :

- Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveau(x) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
- Représenter la figure à l'aide de Cabri-géomètre.
- Les différents cas étudiés sont-ils suffisants ? Quelle critique principale peut-on faire de cet énoncé ?
- Utilisation des angles orientés.

Soient ABC un triangle et M un point quelconque du plan distinct des points A et B

Soient P, Q et R les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB). On suppose que R est distinct de P et Q. Démontrer que  $(\angle MA, MB) \equiv (\angle CA, CB) + (\angle PR, QR) (\pi)$

En déduire que P, Q et R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit à ABC.

# MC07-31-13 : Pythagore et Puzzle de Guogu (07.1, 08.1, 09.1) - 3 pages

Préparation au CAPES 2007 – Université d'Orsay

Epreuve sur Dossier

Dossier T31-MC13

Thème : Outils - Angles

## 1. L'exercice proposé au candidat

On se propose d'étudier plusieurs preuves du théorème de Pythagore.

Preuve n°1

Sur la figure ci-contre :

ABC est un triangle rectangle en A.

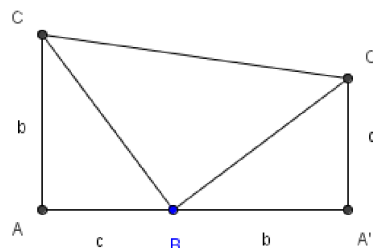
BA'C' est un triangle rectangle en A'.

AC = A'B = b; AB = A'C' = c

B appartient au segment [AA']

a) Montrer que BC'C est un triangle isocèle-rectangle.

b) Calculer l'aire du trapèze AA'C'C de deux façons puis conclure.



Preuve n°2 (Euclide)

Sur la figure ci-contre :

ABC est un triangle rectangle en A.

ABDE, BCFG, ACHI sont des carrés.

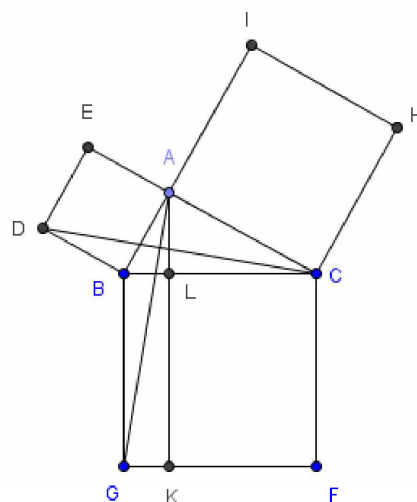
K est le pied de la perpendiculaire à (FG) passant par A.

L est le pied de la perpendiculaire à (BC) passant par A.

a) Montrer que les triangles ABG et BCD sont isométriques.

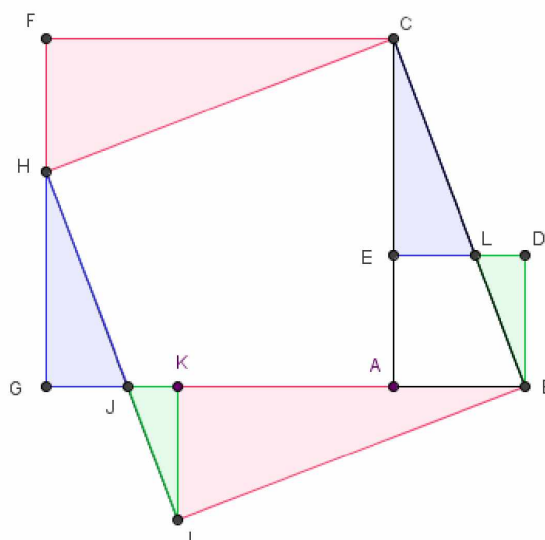
b) Montrer l'égalité des aires :  $a(ABDE) = a(BGKL)$

c) Calculer de même l'aire  $a(ACHI)$  puis conclure



Preuve n°3 (Puzzle de Guogu)

Démontrer le théorème à partir d'une analyse de la figure suivante :



SUITE

## 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

### Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Dégager les connaissances nécessaires concernant les angles, les aires et les triangles pour pouvoir faire ces exercices.
- Q.2) Rédiger un énoncé permettant à un élève de Seconde de résoudre le problème du puzzle de Guogu.

### Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.2)
- deux exercices se rapportant au thème : Outils - Angles

## 3. Quelques références aux programmes :

### Programme de Cinquième (nouveau) :

|                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Caractérisation angulaire du parallélisme.           | Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante et leurs réciproques.                                                                                                                                                     | A cette occasion, le vocabulaire suivant est également utilisé : angles opposés par le sommet, angles alternes-internes, angles correspondants, angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires. Les propriétés sont formulées et utilisées dans les deux sens (direct et réciproque), mais certaines réciproques peuvent être déclarées admises sans démonstration.                                                                                         |
| Triangle :<br>Somme des angles d'un triangle.        | - Connaître et utiliser, dans une situation donnée, le résultat sur la somme des angles d'un triangle. Savoir l'appliquer aux cas particuliers du triangle équilatéral, d'un triangle rectangle, d'un triangle isocèle.                                                       | La symétrie centrale ou la caractérisation angulaire du parallélisme qui en découle permettent de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés.<br>Exemples d'utilisation : trouver quels triangles isocèles ont un angle de 80 degrés.                                                                                                                                                                                                             |
| Construction de triangles et inégalité triangulaire. | Connaître et utiliser l'inégalité triangulaire.<br>- Construire un triangle connaissant :<br>- la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents,<br>- les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés,<br>- les longueurs des trois côtés. | Dans chaque cas où la construction est possible, les élèves sont invités à remarquer que lorsqu'un côté est tracé, on peut construire plusieurs triangles, deux à deux symétriques par rapport à ce côté, à sa médiatrice et à son milieu.<br>L'inégalité triangulaire est mise en évidence à cette occasion et son énoncé est admis : $AB + BC \geq AC$ . Le cas de l'égalité $AB + BC = AC$ est reconnu comme caractéristique de l'appartenance du point B au segment [AC]. |
| Cercle circonscrit à un triangle                     | - Sur papier uni, reproduire un angle au compas.<br>- Construire le cercle circonscrit à un triangle.                                                                                                                                                                         | Ces constructions permettent un premier contact (implicite) avec les trois cas d'isométrie des triangles (théorèmes rencontrés en classe de seconde).<br>La caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance a déjà été rencontrée en classe de sixième. Elle permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle circonscrit à un triangle.                                          |
| Médianes et hauteurs d'un triangle                   | - Connaître et utiliser la définition d'une médiane et d'une hauteur d'un triangle.                                                                                                                                                                                           | Ces notions sont à relier au travail sur l'aire d'un triangle (cf. § 4.3). Des activités de construction ou l'usage d'un logiciel de géométrie permettent de mettre en évidence les propriétés de concours des médianes et des hauteurs d'un triangle. La démonstration de ces propriétés n'est pas envisageable en classe de cinquième, mais possible en classe de quatrième.                                                                                                |

## 32 Géométrie analytique de l'espace (droites, plans, etc.)

## 33 MODE d'EMPLOI

Les archives (qui pourraient éventuellement être déposées sur un serveur, éventuellement accessible au public ?) comporteraient deux éléments :

- un dossier (dit dossier des archives) qui contiendrait tous les fichiers pdf (pdf exclusivement, pas de word ni de TEX, merci) comportant le texte complet de toutes les EOD que nous souhaitons archiver,
- un document pdf global ou deux (un pour l'analyse, et un pour la géométrie), contenant toutes les EOD, avec en plus une table des matières *interactive* où les EOD seraient classés par thème (avec notre numérotation actuelle, qu'il faudrait éviter de changer dans les années qui viennent).

### Mise en forme

1. Pour chaque EOD que vous souhaitez archiver, vous réalisez un fichier pdf que vous désignez comme suit :

- des lettres majuscules correspondant au prénom et nom de l'auteur,
- un numéro (de 1 à n, n étant le nombre total de vos EOD), que vous attribuez arbitrairement (mais bijectivement). Je l'appelle *numéro d'ordre* dans ce qui suit.

Par exemple : DP75.pdf, MCD2.pdf, FIR27.pdf, etc.

2. Vous attribuez des références à votre EOD pour son archivage. Prenons l'exemple du fichier MCD2.pdf que vous trouverez dans le fichier joint (Tabledossiers.pdf). Il s'agit d'un exercice sur une rotation envoyant un cercle sur un autre, qui peut servir à la fois dans le thème 18 et le thème 31. Vous lui donnez deux références (une pour chaque thème où cette EOD peut être utile), formées ainsi :

- les initiales du nom de l'auteur, ici MCD,
- la date de création du fichier, ici 05 (on prend comme référence l'année du CAPES qui est préparé, par exemple 07 pour toutes les EOD de 2006-2007),
- le thème, ici 18 pour l'un et 31 pour l'autre,
- le numéro d'ordre (celui de votre numérotation personnelle).

Voilà ce que ça donne ici : MCD05-18-2 et MCD05-31-2.

### Transmission

Vous transmettez tous les fichiers EOD renommés à Marie-Claude (Marie-Claude.David@math.u-psud.fr) et vous y joignez dans un fichier, soit TEX (sans en-tête), soit simple texte, soit un message mail (mais pas de Word) les lignes suivantes.

Pour une EOD donnée, on envoie deux lignes pour CHACUN des thèmes concernés, par exemple :

```
\subsection{MCD05-18-2 : Rotation envoyant un cercle sur un autre (05.s)}
\noindent \includegraphics[height=240mm]{MCD2.pdf}
```

```
\subsection{MCD05-31-2 : Rotation envoyant un cercle sur un autre (05.s)}
\noindent \includegraphics[height=240mm]{MCD2.pdf}
```

Lorsque le fichier comporte plus qu'une page, ce serait bien de me le signaler ainsi : /Attention, cette EOD comporte n pages./ Daniel m'a conseillé de ne pas alourdir les archives avec les reproductions de programme mais cette partie est conservée dans le fichier à télécharger.

L'intérêt de mettre un petit titre (en plus du thème) est évident, cela permet de s'y retrouver parmi tous les sujets donnés sur le thème.

### Mémoire de l'utilisation

Le nombre entre parenthèses à la fin, (05.s) signifie que ce sujet a été donné en 2004-2005, en soutien. Si le sujet a été donné en 2004-2005 dans le groupe 1 on indique (05.1), évidemment (05.2)

pour le groupe 2 et (05.0) pour les oraux blancs. Si vous l'avez donné plusieurs fois, vous mettez, par exemple, (05.1, 06.2). Si vous ne l'avez encore jamais donné vous mettez une date bidon (09.8) ou (10.x) comme vous voulez.

Là encore c'est vachement bien pour refaire un planning l'année suivante, ou pour prévoir les oraux blancs. Evidemment, ce serait bien de mettre à jour cette table régulièrement ... Rassurez-vous (si cela vous semble compliqué) si vous oubliez des informations ce n'est pas une catastrophe. Si vous avez donné une EOD créée par quelqu'un d'autre, nous essaierons de la repérer pour éviter les doublons.

Vous ne vous inquiétez pas des commandes cabalistiques (`\subsection`, etc.), cela permettra à Marie-Claude de gagner du temps, pour vous, il vous suffira juste de les recopier d'une ligne à l'autre.

### **Les EOD du jury**

Pour les EOD provenant du jury, que vous avez utilisées et que vous souhaitez archiver, par exemple, le sujet donné le 13 juillet 2005 (13/07/05), qui concernait le thème 46 :

- on désigne le fichier pdf : JURY05-1307.pdf (cela fera un classement chronologique pour ces EOD là), et on l'envoie à Marie-Claude,
- on donne comme référence pour la table :

```
\subsection{JURY05-46-1307 : Calcul de e par Taylor reste intégrale (06.1, 06.2)}  
\noindent \includegraphics[height=240mm]{JURY05-1307.pdf}
```

### **Corrigés**

Si vous avez écrit, pour certaines EOD (disons par exemple la fameuse MCD2), un corrigé, ou un commentaire et que vous souhaitez qu'il soit archivé, vous faites un fichier intitulé MCD2C.pdf (C comme corrigé ou commentaire) et pour la référence dans la table :

```
\subsection{MCD05-18-2C : Rotation envoyant un cercle sur un autre, corrigé (05)}  
\noindent \includegraphics[height=240mm]{MCD2C.pdf}
```

### **Utilisation**

Le mieux pour comprendre tout ça et vous en faire saliver d'envie, est de se reporter au fichier TableDossiers.pdf joint, vous verrez qu'en cliquant sur la table vous allez directement au thème concerné et à l'EOD prévue, c'est génial. Avec la table vous aurez le numéro de fichier de l'EOD qui vous intéresse et vous le trouverez dans le dossier des archives. Si vous souhaitez avoir la source (par exemple pour la modifier), il vous suffira de la demander à l'auteur. Pour actualiser vos EOD il suffit d'envoyer la nouvelle version à Marie-Claude qui compilera.